

EIN EXISTENZSATZ FÜR INVARIANTE KURVEN EINER
GESTÖRTEN TWIST-ABBILDUNG
UND SEINE ANWENDUNG AUF DIE STABILITÄT EINER
GLEICHGEWICHTSLÖSUNG EINES SPEZIELLEN HAMIL-
TON-SYSTEMS MIT DEM FREIHEITSGRAD 2

Tino J. Uhl

Mainz 1978

EIN EXISTENZSATZ FÜR INVARIANTE KURVEN EINER
GESTÖRTEN TWIST - ABBILDUNG
UND SEINE ANWENDUNG AUF DIE STABILITÄT EINER
GLEICHGEWICHTSLÖSUNG EINES SPEZIELLEN HAMILTON-
SYSTEMS MIT DEM FREIHEITSGRAD 2

D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung des Grades

" D O K T O R D E R N A T U R W I S S E N S C H A F T "

am Fachbereich Mathematik

der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz

Tino J. Uhl

geb. in Birkenfeld/Nahe

Mainz 1977



Prüfungsausschuss

Statuten

1. Einleitende Bestimmungen

1.1. Der Prüfungsausschuss besteht aus folgenden Mitgliedern:

1.2. Der Prüfungsausschuss wählt aus seiner Mitte einen Vorsitzenden und einen Stellvertreter.

1.3. Der Prüfungsausschuss wählt aus seiner Mitte einen Schriftführer.

1.4. Der Prüfungsausschuss wählt aus seiner Mitte einen Beisitzer.

2. Die Aufgaben des Prüfungsausschusses

2.1. Der Prüfungsausschuss wählt aus seiner Mitte einen Vorsitzenden und einen Stellvertreter.

2.2. Der Prüfungsausschuss wählt aus seiner Mitte einen Schriftführer.

2.3. Der Prüfungsausschuss wählt aus seiner Mitte einen Beisitzer.

2.4. Der Prüfungsausschuss wählt aus seiner Mitte einen Vorsitzenden und einen Stellvertreter.

Fachbereichsdekan : Prof. Dr. A. Pfister

1. Berichterstatter : Prof. Dr. H. Rüßmann

2. Berichterstatter : Prof. Dr. E. Zehnder

Tag der mündlichen Prüfung : 14.02.78



Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
------------	---

§0 Einleitende Betrachtungen

0.1 Einige bekannte Ergebnisse der Stabilitätstheorie bzgl. Hamilton-Systemen mit dem Freiheitsgrad n	5
0.2 Der Beweis eines Stabilitätssatzes	12
0.3 Die Problemstellung und Formulierung der Hauptidegebisse	31

§1 Ein Existenzsatz über invariante Kurven

1.1 Formale Lösung des Problems	36
1.2 Aufstellung einer geeigneten Funktionalgleichung zur Lösung der Konvergenzfrage	43
1.3 Lösung der linearisierten Gleichungen	48
1.4 Der Induktionsanfang der Newton-Iteration und Formulierung der Induktionsbehauptung	58
1.5 Abschätzung des Restglieds und Abschluß des Induktionsbeweises	66
1.6 Die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge und Abschluß des Beweises des Existenzsatzes	76
1.7 Eine gestörte Twistabbildung unter zusätzlicher Abhängigkeit eines komplexen Parameters	79

1.8 Über die Eindeutigkeit des Parameters a

§2 Die isoenergetische Stabilität eines speziellen Hamiltonschen Systems mit dem Freiheitsgrad 2

2.1 Einleitende Betrachtungen 94

2.2 Die Bedingung $L/\tilde{H}$ und ihre Auswirkung 98

2.3 Der Beweis des 2. Hauptsatzes 104

2.4 Der Abschluß des Beweises der isoenergetischen 118
Stabilität auf der Energiefläche $h = 0$

Symbolverzeichnis 120

Literaturverzeichnis

Einleitung

Ausgangspunkt vieler Betrachtungen in der Himmelsmechanik sind die Differentialgleichungen 2. Grades des n - Körperproblems:

$$(1) \quad m_k \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_k}, \quad U = \sum_{1 \leq k < l \leq n} \frac{m_k m_l}{|x_k - x_l|}, \quad (k=1, \dots, n).$$

Dabei stellen die m_k ($k=1, \dots, n$) n Massenpunkte dar, welche sich untereinander nach dem Newton'schen Gesetz mit der Kraft U anziehen; $|x_k - x_l|$ bedeutet den euklidischen Abstand zwischen den Massen m_k und m_l .

Das System (1) läßt sich vermöge geeigneter Transformationen in ein reelles Hamilton-System n -ten Grades der Gestalt

$$(2) \quad \dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k} \quad (k = 1, \dots, n)$$

überführen. Hat man Lösungen von (1) bzw. (2) gefunden, so interessiert man sich für ihr Verhalten für eine unendlich lange Zeitspanne. Insbesondere geht man der Frage nach, ob solche Lösungen stabil sind; d.h. man untersucht das Problem, ob der Ausdruck

$$\max_{k < l} (|x_k - x_l|, |x_k - x_l|^{-1})$$

für ein unendliches Zeitintervall beschränkt bleibt.

Bei Hamilton-Systemen mit dem Freiheitsgrad 2 ist in dieser Fragestellung dank neuer Forschungsergebnisse der letzten 2 Jahrzehnte ein bemerkenswerter Fortschritt erzielt worden. Denn sei die Hamilton-Funktion H von (2) analytisch und gegeben in der Form

$$H = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \text{höhere Glieder in } x_1, \dots, y_2,$$

so ist die Stabilität der Lösungen von (2) in den folgenden Fällen gesichert:

1. λ_1, λ_2 rein imaginär; $\lambda_1/\lambda_2 > 0$.

(Ergebnis von Dirichlet [6])

2. λ_1, λ_2 rein imaginär; $\lambda_1/\lambda_2 < 0$; der Linearteil

$$L := \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2$$

teilt nicht die Normalform $\tilde{H}$ von H .

(Ergebnis von ARNOLD u. MOSER [27], § 35)

3. λ_1, λ_2 rein imaginär; $\lambda_1/\lambda_2 < 0$; die Normalform $\tilde{H}$ von H ist eine Funktion des Linearteils L .

(Ergebnis von ROBMANN [18])

In den Fällen 2 und 3 wird mit der Normalform $\tilde{H}$ eine eindeutig bestimmte formale Potenzreihe bezeichnet, welche nur von den zwei Produkten $x_1 y_1, x_2 y_2$ abhängt; $\tilde{H}$ geht aufgrund einer formalen kanonischen Potenzreihentransformation aus der ursprünglichen Hamilton-Funktion hervor.

LJAPUNOV [8] zeigte, daß für die Stabilität der Lösungen von (2) notwendig gelten muß: Die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des Linearteils $L := \lambda_1 x_1 y_1 + \dots + \lambda_n x_n y_n$ der analytischen Hamilton-Funktion H aus (2) sind rein imaginär. Mit den oben vorliegenden Resultaten wird damit offensichtlich, daß für Hamilton-Systeme mit dem Freiheitsgrad 2 die Stabilitätsfrage nur noch in dem folgenden Fall zu behandeln gilt:

λ_1, λ_2 rein imaginär; $\lambda_1/\lambda_2 < 0$; die Normalform $\tilde{H}$ von H ist durch den Linearteil L teilbar aber sie ist keine Funktion in L .

Dem Studium dieses noch ungelösten Problems ist diese Arbeit gewidmet. Zwar wird es nicht gelingen, die offenstehende Frage abschließend zu behandeln. Doch ist es immerhin möglich, die Stabilität auf der Energiefläche $h = 0$ nachzuweisen.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. RÜßMANN dafür danken, daß er mich auf diese Themenstellung aufmerksam gemacht hat und mich bei meinen Untersuchungen stets prompt und hilfreich unterstützte.

§ 0 Einleitende Betrachtungen

Der erste Teil dieses Paragraphen gibt einen Überblick der wesentlichen bereits vorliegenden Ergebnisse der Stabilitätstheorie Hamiltonscher Systeme mit dem allgemeinen Freiheitsgrad n . Auf einen Stabilitätssatz von MOSER [27], § 35, wird ausführlich eingegangen werden müssen, da dessen Beweisidee im späteren Verlauf dieser Arbeit noch einmal Verwendung finden wird. Schließlich wird im 3. Teil des Paragraphen die Problemstellung dieser Arbeit hergeleitet; es folgt die Formulierung der Hauptergebnisse.

Wir betrachten im folgenden autonome Hamilton-Systeme n -ten Freiheitsgrades der Form

$$(1) \quad \frac{d}{dt} x_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \frac{d}{dt} y_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Die Hamilton-Funktion kann dabei nach einer vorbereitenden linearen kanonischen Transformation in der Gestalt

$$(2) \quad H(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \lambda_1 x_1 y_1 + \dots + \lambda_n x_n y_n + \dots$$

vorausgesetzt werden. Die nicht hingeschriebenen Terme sind Glieder höherer Ordnung in $x_1, \dots, y_n$; außerdem wird H in einem geeigneten Gebiet D als reell analytisch angenommen.

Offensichtlich ist wegen (2) $Z_0(t) := (0, \dots, 0)$ eine Lösung von (1) und die Stabilität dieser Gleichgewichtslösung ist definiert wie folgt:

DEFINITION: $Z_0(t) = (0, \dots, 0)$ heißt stabil, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gibt, sodaß für jede Lösung $Z(t)$ von (1) mit $Z(t) \in D$ f.a. $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$|Z(t)| < \varepsilon,$$

wenn nur für den Anfangswert $Z(0) := (x_1(0), \dots, y_n(0))$ gilt

$$|Z(0)| < \delta.$$

Bem.: a) Die Stabilität wird hier für eine ganz spezielle Lösung von (1), nämlich einer singulären Lösung definiert. Es ist nun möglich aufgrund geeigneter Transformationen (vgl. [21]) das Stabilitätsverhalten der Gleichgewichtslösung auf die Stabilitätseigenschaften anderer Lösungen $Z(t, z_0, t_0)$ mit $Z(t_0) = z_0$ zu übertragen.

b) Für praktische Zwecke ist es sinnvoll, Stabilität im Ljapunovschen Sinne zu definieren. So wird zum Beispiel i.a. in der Himmelsmechanik obige Definition in der Form abgeändert, daß nur das Verhalten von Lösungen $Z(t)$ für $t \geq 0$ untersucht wird. Bei den folgenden rein theoretischen Betrachtungen wollen wir jedoch nur die Definition von oben verwenden.

Bei Hamilton-Systemen ist es möglich, eine schwächere Form der Stabilität zu definieren. Man weiß, daß die Hamilton-Funktion H eines autonomen Systems (1) ein Integral von (1) darstellt. Das bedeutet, H ist entlang jeder Lösungskurve konstant. Es gilt also

$$H(Z(t)) = h = \text{const.}$$

für jede Lösung $Z(t)$ von (1). Auf der $2n-1$ dimensionalen Fläche

$$E_h := \{ z = (x_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^{2n} \mid H(z) = h \}$$

wird jetzt die isoenergetische Stabilität der Ruhelage fixiert. Dazu bezeichne $U_\epsilon(Z)$ die Menge

$$U_\epsilon(Z) := \{ z = (x_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^{2n} \mid |Z(t) - z| < \epsilon, -\infty < t < \infty \},$$

wenn $Z(t)$ eine beliebige Lösung von (1) darstellt. Wir definieren

DEFINITION: Die Gleichgewichtslage $Z(t) = (0, \dots, 0)$ heißt isoenergetisch stabil auf der Niveauläche E_0 , wenn es zu einem beliebigen $\epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ gibt, sodaß für jede Lösung $Z(t)$ von (1) mit $Z(0) \in E_0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$Z(t) \in U_\epsilon(Z)$$

falls nur für den Anfangswert $Z(0)$ die Ungleichung $|Z(0)| < \delta$ erfüllt ist.

Es ist aus den vorliegenden Definitionen klar, daß Stabilität die isoenergetische Stabilität bedingt. Hingegen ist die Umkehrung dieser Aussage falsch.

0.1 Einige bekannte Ergebnisse der Stabilitätstheorie bzgl.

Hamilton-Systemen mit dem Freiheitsgrad n

Zuerst schicken wir einige zur Abkürzung geeignete Bezeichnungen voraus:

$$x := (x_1, \dots, x_n)^T ; \quad y := (y_1, \dots, y_n)^T ; \quad z := (x, y)^T$$

$$\dot{z}_k := \frac{d}{dt} z_k ; \quad H_{z_k} := \frac{\partial H}{\partial z_k} \quad (k = 1, \dots, 2n) .$$

Das hochgesetzte T bedeutet, daß der vorgegebene Vektor zu transponieren ist; $\bar{c}$ ist das konjugiert Komplexe einer Zahl $c \in \mathbb{C}$.

Wir betrachten im folgenden Hamilton-Systeme der Form

$$(1.1) \quad \dot{x}_k = H_{y_k} , \quad \dot{y}_k = -H_{x_k} \quad (k = 1, \dots, n) .$$

Die Hamilton-Funktion H ist reell analytisch in einem offenen Gebiet $D \subset \mathbb{C}^{2n}$, sie kann angenommen werden (s.o) in der Gestalt

$$(1.2) \quad H(x, y) = \lambda_1 x_1 y_1 + \dots + \lambda_n x_n y_n + f(x, y)$$

und f ist eine konvergente Potenzreihe, welche mit Glieder in x, y der Ordnung größer als 2 beginnt. Weiter wollen wir als Lösungen von (1.1) in Zukunft nur solche

$$Z(t) := (x_1(t), \dots, y_n(t)) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^{2n}$$

behandeln, welche den Realitätsbedingungen

$$y_k(t) = i \overline{x_k(t)} \quad (k = 1, \dots, n)$$

gehoren.

Wir fragen jetzt nach hinreichenden wie notwendigen Bedingungen dafür, damit eine Lösung $Z(t)$ von (1.1) stabil ist. Wie wir aus

Bemerkung a) zu Definition 1 wissen, ist die Fragestellung gleichbedeutend mit dem Problem: Wann ist die Gleichgewichtslage

$$Z(t) = (0, \dots, 0) \text{ stabil?}$$

Zunächst machen die Stabilitätssätze von LJAPUNOV [27], §28, [21], §11 zweierlei offensichtlich:

1. Hamilton-Systeme gehören zu den sog. kritischen Fällen; d.h.

Lösungen des linearisierten Systems

$$\dot{x}_k = \lambda_k x_k, \quad \dot{y}_k = -\lambda_k y_k \quad (k = 1, \dots, n)$$

geben keinerlei Auskunft über das Stabilitätsverhalten der Lösungen des Gesamtsystems (1.1). Demnach wirkt sich entscheidend die Funktion f aus (1.2) auf die Stabilität aus.

2. Notwendig aber nicht hinreichend für die Stabilität der Gleichgewichtslösung ist die Bedingung: Alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ in (1.2) sind rein imaginär.

Aus 2. folgt, daß bzgl. der Stabilitätstheorie nur solche Hamilton-Systeme von Interesse sind, deren sämtliche Eigenwerte verschwindende Realteile besitzen.

Etwa um 1900 wird durch Arbeiten von DIRICHLET und LJAPUNOV [27], §29 folgendes bekannt.

Satz 1

Hinreichend für die Stabilität der Gleichgewichtslage von (1.1) sind die beiden Bedingungen

(i) λ_i rein imaginär ($i = 1, \dots, n$).

(ii) Alle λ_i haben das gleiche Vorzeichen.

Bewiesen wird der Satz durch ein Resultat von DIRICHLET [6]. Dieser konnte nämlich für ein analytisches Differentialgleichungssystem

$$(1.3) \quad \dot{x}_k = f_k(x) \quad (k = 1, \dots, m)$$

mit der singulären Lösung $z = 0$ zeigen:

Die Ruhelage $z = 0$ ist stabil, wenn (1.3) ein zeitfreies Integral g besitzt mit der Eigenschaft: g hat in $z = 0$ ein relatives Extremum im strengen Sinn.

Mit diesem Ergebnis läßt sich Satz 1 leicht beweisen. Denn H ist bekanntlich ein Integral von (1.1). Außerdem bedingt (1.2) die Zeitfreiheit von H und daß $z = 0$ eine Ruhelage von (1.1) darstellt. Da nach den Voraussetzungen des Satzes 1 noch gilt: die

Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ist positiv bzw. negativ definit, so folgt daraus, daß H in $z = 0$ ein Extremum besitzt. Wegen Dirichlet ist damit Satz 1 klar.

Die ersten Jahrzehnte des 20. Jahrhunderts brachten keinerlei nennenswerte Fortschritte in der Stabilitätstheorie bei Hamilton-Systemen. Dies ist darauf zurückzuführen, daß es nicht gelang, allgemeine Integrationsmethoden für diese Systeme zu finden. Zwar kannte man schon lange formale kanonische Potenzreihentransformationen

$$(1.4) \quad x_k \longleftrightarrow \xi_k, \quad y_k \longleftrightarrow \eta_k \quad (k=1, \dots, n)$$

welche die Eigenschaft besitzen, die Hamilton-Funktion H aus (1.2) in die eindeutig bestimmte Normalform $\tilde{H}$ umzuwandeln. POINCARÉ [8] behandelte solche Substitutionen als erster ausführlich.

Die Normalform $\tilde{H}$ ist eine formale Reihe in den n Produkten $\omega_k := \xi_k \eta_k$ ($k=1, \dots, n$) und (1.1) geht vermöge (1.4) über in das formale Hamilton-System

$$(1.5) \quad \dot{\xi}_k = \tilde{H}_{\eta_k} = \xi_k \tilde{H}_{\omega_k}, \quad \dot{\eta}_k = -\tilde{H}_{\xi_k} = -\eta_k \tilde{H}_{\omega_k} \quad (k=1, \dots, n).$$

Im Falle einer konvergenten Transformation (1.4) läßt sich (1.5) sofort in der Form integrieren

$$(1.6) \quad \xi_k(t) = \xi_k(0) e^{\tilde{H}_{\omega_k} t}, \quad \eta_k(t) = \eta_k(0) e^{-\tilde{H}_{\omega_k} t} \quad (k=1, \dots, n).$$

In Bezug auf die Stabilitätstheorie leitet sich jetzt leicht das folgende Ergebnis ab:

Satz 2

Existiert eine konvergente kanonische Transformationsform (1.4) von H in die Normalform $\tilde{H}$ und sind alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rein imaginär, so ist die Ruhelage $z = 0$ von (1.1) stabil.

Der Beweis dieses Satzes ist offensichtlich; denn unter der Beachtung der Realitätsbedingungen (s.o) kann man zeigen, daß mit λ_k auch H_{ω_k} rein imaginär ist (siehe dazu [27], §30). Damit wird also aus (1.6) eine Drehung, woraus man wegen der Konvergenz von (1.4) die Aussage des Satzes 2 erhält.

Wie sieht es nun mit dem praktischen Nutzen des letzten Satzes aus? Lange Zeit war unbekannt, ob die Konvergenz der Transformation (1.4) die Regel oder nur die Ausnahme war. Erst SIEGEL [25] konnte 1954 in einer grundlegenden Arbeit nachweisen, daß i.a. keine Konvergenz der kanonischen Transformation in die Normalform vorliegt. Also richtete sich in der Folgezeit das Interesse darauf, hinreichende Kriterien für die Existenz einer konvergenten Substitution (1.4) zu finden. Hierbei gelangen ROßMANN [17], [18] zwei bemerkenswerte Ergebnisse. Er zeigte nämlich: Die kanonische Transformation (1.4) von H in die Normalform $\tilde{H}$ ist konvergent, falls entweder gilt

a) Das System (1.1) läßt sich vermöge einer konvergenten Transformation in ein System der Gestalt

$$\dot{f}_k = p_k f_k, \quad \dot{z}_k = -p_k z_k \quad (k = 1, \dots, n)$$

umwandeln. Dabei sind die p_k ($k=1, \dots, n$) konvergente Reihen in den n Produkten $f_k z_k$.

oder es ist erfüllt

b) Die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ erfüllen die Ungleichungen

$$(1.7) \quad \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j g_j \right| \geq c \left(\sum_{j=1}^n |g_j| \right)^{-\nu} \quad (c, \nu > 0)$$

für alle ganze Zahlen $g_1, \dots, g_n$ mit $\sum_{j=1}^n |g_j| > 0$.

Außerdem ist die Normalform $\tilde{H}$ von H eine Funktion des Linear-
teils $L := \lambda_1 x_1 y_1 + \dots + \lambda_n x_n y_n$.

Diese beiden Resultate leisten nun wegen Satz 2 für das Stabilitäts-
problem folgendes:

Satz 3

Sind die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rein imaginär und gelten die Vor-
aussetzungen von a), dann ist die Gleichgewichtslage $z = 0$
von (1.1) stabil.

Satz 4

Sind die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rein imaginär; es gelten die Un-
gleichungen (1.7) und die Normalform $\tilde{H}$ von H ist eine Funktion
des Linear- teils $L := \lambda_1 x_1 y_1 + \dots + \lambda_n x_n y_n$. Dann ist die Ruhe-
lage $z = 0$ von (1.1) stabil.

Mit den Sätzen 1 - 4 erschöpfen sich bereits die Aussagen über das
Stabilitätsverhalten von Lösungen Hamiltonscher Systeme mit dem all-
gemeinen Freiheitsgrad $n > 0$.

Bezeichne für das weitere μ den Quotienten λ_1/λ_2 . Aus den be-
reits vorliegenden Ergebnissen erkennen wir, daß für $n = 2$ nur noch
die folgenden zwei Fälle zur Behandlung offen stehen:

1. λ_1, λ_2 rein imaginär; $\mu < 0$; $L := \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2$ teilt nicht
die Normalform $\tilde{H}$ von H .
2. λ_1, λ_2 rein imaginär; $\mu < 0$; L teilt die Normalform $\tilde{H}$ von H
aber $\tilde{H}$ ist keine Funktion des Linear- teils L .

In [18] wird erwähnt, daß ARNOOLD [1] die Stabilität in dem Fall

nachgewiesen hat, wo die Bedingung (1.7) erfüllt ist und wo die Normalform $\tilde{H}$ von H keine Funktion des Linearteils L darstellt. Ein solches Resultat würde offensichtlich nachsichziehen, daß die Stabilitätsfrage für Hamilton-Systeme mit dem Freiheitsgrad 2 vollständig gelöst ist. Denn die auf der vorangegangenen Seite aufgeführten zwei restlichen Fälle würde das zitierte Ergebnis von Arnold abschließend behandeln.

Tatsächlich ist es aber so, daß das obige Resultat Arnold's niemals bewiesen wurde; die falsche Aussage in [18] ist auf einen Druckfehler in dem russischen Artikel zurückzuführen. (Vgl. auch hier zu [4]) In Wirklichkeit behandelte ARNOLD [2] nur den Fall der Stabilität einer Gleichgewichtslösung, wo der Linearteil L die Normalform $\tilde{H}$ von H nicht teilt. MOSER [27] konnte entgültig beweisen

Satz 5

Sei λ_1, λ_2 rein imaginär; $\mu < 0$; der Linearteil L teilt nicht die Normalform $\tilde{H}$ von H . Außerdem erfüllt μ die Ungleichungen

$$(1.8) \quad |2\pi\mu^k - 1| \geq c k^{-\beta} \quad (k = 1, 2, \dots; l = 0, \pm 1, \dots)$$

mit positiven Konstanten c, β .

Beh.: Die Gleichgewichtslösung $z = 0$ von (1.1) ist stabil.

Zwei Bemerkungen sind hier anzuschließen.

- a) Solche $\mu \in \mathbb{R}$, welche die Ungleichungen in (1.8) nicht erfüllen, gehören zu einer Menge mit dem Lebesgue-Maß Null (siehe [21], §15).
- b) Die Bedingung: L teilt nicht die Normalform $\tilde{H}$, läßt sich im konkreten Fall leicht nachprüfen, da nur endlich viele Konditionen zu kontrollieren sind.

Mit Satz 5 sind wir am Ende der Zusammenstellung allgemeiner Ergebnisse der Stabilitätstheorie bzgl. Hamilton-Systemen. Wir sehen, daß es für Systeme mit dem Freiheitsgrad 2 nur noch der Fall zu lösen gilt, wo der Linearteil die Normalform $\tilde{H}$ teilt. Kennt man die Antwort bzgl. dieser Problemstellung, ist die Stabilitätsfrage für Hamilton-Systeme mit dem Freiheitsgrad 2 vollständig abgeschlossen.

Diese Arbeit hat nun nicht das Ziel verfolgt, den ausstehenden Fall abschließend zu behandeln; dies erscheint unter den gegenwärtigen Voraussetzungen noch nicht möglich. Immerhin wird es uns gelingen, wenigstens die isoenergetische Stabilität der Ruhelage auf der Niveaufläche $H = 0$ zu beweisen.

Am Schluß dieses Abschnitts muß noch gesagt werden, daß die vorangegangene Aufstellung von Stabilitätsergebnissen bzgl. Hamilton-Systemen keineswegs den Anspruch auf Vollständigkeit erheben darf. So gibt es z.Bsp. eine Reihe von Arbeiten - siehe etwa MARKEEV [5] - welche ganz spezielle Hamilton-Systeme vom Freiheitsgrad $n > 2$ betrachten und gegebenenfalls Stabilität bzw. Nichtstabilität des untersuchten Systems beweisen. Das Aufführen solcher Ergebnisse hier würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

0.2 Der Beweis eines Stabilitätssatzes

In diesem Abschnitt geben wir den Beweis zu dem Satz 5 vollständig wieder, weil er wesentlich zum besseren Verständnis der Ausführungen im 2. Teil dieser Arbeit beitragen wird. Zuerst führen wir dazu ein Ergebnis von MOSER [27] über invariante Kurven auf, das maßgeblich in dem Nachweis zu Satz 5 Anwendung findet.

Satz 2.1

Vor.: a) Sei $D \subset \mathbb{C}^2$ offen und A eine in D reell analytische gestörte Twistabbildung von der Gestalt

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x_1 &= \omega + x + y + f(x, y) \\ y_1 &= y + g(x, y) \end{aligned}$$

b) f, g sind 2π -periodisch in x und es gilt in D die Abschätzung $|f| + |g| < M$ für eine genügend kleine positive Konstante M .

c) ω erfüllt die Ungleichungen

$$(2.2) \quad |(\omega/2\pi)^k - p| \geq ck^{-\beta} \quad (k, p = 1, 2, \dots)$$

mit positiven Konstanten $c > 0, \beta > 1$.

d) Die Abbildung A erfüllt die Schnittbedingung; dh. jede reell analytische geschlossene Kurve

$$y = \tilde{\phi}(x) = \tilde{\phi}(x + 2\pi) \quad -\infty < x < \infty$$

mit $(x, y) \in D$ schneidet ihr Bild unter (2.1) in $D \cap \mathbb{R}^2$. Es gibt also Winkel $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, für die gilt

$$A \begin{pmatrix} x_0 \\ \tilde{\phi}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \tilde{\phi}(x_1) \end{pmatrix}$$

Beh.: Die Abbildung A besitzt eine reell analytische geschlossene invariante Kurve $K = K(\xi)$ für die gilt:

$$A \circ K(\xi) = K(\xi + \omega) \quad -\infty < \xi < \infty$$

Mit Hilfe dieses Satzes beweisen wir Satz 5, den wir noch einmal ausführlich formulieren.

Satz 2.2

Vor.: a) Gegeben ist die Hamilton-Funktion H in der Gestalt

$$(2.3) \quad H = H(x, y) = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \sum_{k=4}^{\infty} H_k(x, y)$$

Dabei sind die H_i homogene Polynome vom Grad i in x, y .

Außerdem ist H reell analytisch in einem offenen Gebiet $D \subset \mathbb{C}^2$

b) λ_1, λ_2 sind rein imaginär; $\mu < 0$; μ irrational; μ erfüllt die Ungleichungen (1.8).

c) Der Linearteil $L := \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2$ teilt nicht die Normalform $\tilde{H}$ von H .

Beh.: Die Ruhelage des Hamilton-Systems (1.1) mit der Hamilton-Funktion H aus (2.3) ist stabil.

Bew.: Der Satz wird indirekt bewiesen. Wir gehen also davon aus, daß die Ruhelage nicht stabil ist; d.h. betrachten wir eine den Realitätsbedingungen gehorchende Lösung $x_1(t), x_2(t), y_1(t) = \overline{ix_1(t)}, y_2(t) = \overline{ix_2(t)}$ des Systems

$$(2.4) \quad \dot{x}_k = H_{y_k}, \quad \dot{y}_k = -H_{x_k} \quad (k = 1, 2)$$

mit den Anfangswerten $x_1(0), \dots, \overline{ix_2(0)}$, so bedeutet gemäß Definition die Instabilität der Ruhelage folgendes: Für noch so kleines positives ϵ mit

$$(2.5) \quad |x_1(0)|^2 + |x_2(0)|^2 < \epsilon^2$$

existiert ein $t_0 \in \mathbb{R}$, sodaß gilt

$$(2.6) \quad |x_1(t_0)|^2 + |x_2(t_0)|^2 = c^2 \epsilon^2$$

für eine beliebige Konstante $c > 0$. Wir wählen hier

$$(2.7) \quad c = 3\sqrt{-\mu}$$

Die durch die Annahme der Instabilität bedingten Voraussetzungen (2.5), (2.6) werden jetzt in eine einfachere Form gebracht. Dazu machen wir die Substitution

$$(2.8) \quad x_k \longleftrightarrow \varepsilon^{-1} x_k, \quad y_k \longleftrightarrow \varepsilon^{-1} y_k \quad (k = 1, 2).$$

Hierbei handelt es sich offensichtlich um keine kanonische Transformation; doch bleiben die Differentialgleichungen (2.4) erhalten, wenn nur die ursprüngliche Hamilton-Funktion H aus (2.3) ersetzt wird durch

$$(2.9) \quad H = H(x, y, \varepsilon) = L + \sum_{k=4}^{\infty} \varepsilon^{k-2} H_k(x, y).$$

H bleibt offensichtlich reell analytisch; jedoch bewirkt die Transformation (2.8), daß sich die Bedingungen (2.5), (2.6) einfacher in der Form

$$(2.10) \quad |x_1(0)|^2 + |x_2(0)|^2 < 1$$

$$(2.11) \quad |x_1(t_0)|^2 + |x_2(t_0)|^2 = c^2 \quad (c = 3\sqrt{-\mu})$$

schreiben lassen. Als erstes beweisen wir

Lemma 2.1 Gelte O.B.d.A. $t_0 > 0$ und

$$(2.12) \quad |\lambda_1| > |\lambda_2|$$

und sei

$$(2.13) \quad Z(t) := (x_1(t), x_2(t), i \overline{x_1(t)}, i \overline{x_2(t)})$$

eine Lösung von (2.4) mit der Hamilton-Funktion aus (2.9). Dann gilt: Während der Zeit $0 \leq t \leq t_0$ durchläuft die Funktion $|x_1(t)|^2$ alle Werte des Intervalls $[2, 3]$.

Bew.: Bezeichne im folgenden $c_1, \dots, c_6$ positive Konstanten, welche unabhängig sind von ε und der Lösung (2.13). Wir wissen, H ist ein Integral von (2.4); demnach gilt für eine Lösung (2.13) die Gleichung $H(Z(t)) = h$ und h ist eine feste Konstante.

Weiter erhalten wir aufgrund von (2.13) und der Holomorphie von H und der Gleichung $L = |\lambda_1| |x_1|^2 - |\lambda_2| |x_2|^2$ den Zusammenhang

$$h = L + \epsilon^2 H_4 + \dots < |\lambda_1| |x_1|^2 - |\lambda_2| |x_2|^2 + c_1 \epsilon^2.$$

Daraus ergibt sich für $t = 0$ unter Beachtung von (2.10), (2.12) die Relation

$$|h| < |\lambda_1| |x_1|^2 - |\lambda_2| |x_2|^2 + c_1 \epsilon^2 < \frac{3}{2} |\lambda_1| \quad (t = 0),$$

wenn nur ϵ genügend klein ist. Die Konstante h ist also betragsmäßig kleiner als $\frac{3}{2} |\lambda_1|$, was uns bei genügend kleinem ϵ zu der Ungleichung führt:

$$\begin{aligned} |\lambda_1| |x_1|^2 - |\lambda_2| |x_2|^2 = L = h - \epsilon^2 (H_4 + \epsilon H_5 + \dots) &\gg \\ &> -|h| - c_2 \epsilon^2 > -2|\lambda_1|. \end{aligned}$$

Wegen (2.11) gilt noch für $t = t_0$: $|x_2|^2 = 9|\lambda_1|/|\lambda_2| - |x_1|^2$.

Dies in die letzte Ungleichung eingesetzt liefert für $t = t_0$ die Relation

$$(|\lambda_1| + |\lambda_2|) |x_1|^2 \geq |\lambda_2| 9|\lambda_1|/|\lambda_2| - 2|\lambda_1| = 7|\lambda_1|$$

und weil noch wegen (2.12) ist $|\lambda_1| + |\lambda_2| \leq 2|\lambda_1|$, erhalten wir

$$|x_1(t)|^2 \geq \frac{7}{2} > 3 \quad (t = t_0)$$

Dies, (2.10) und die Stetigkeit von $|x_1(t)|^2$ liefern die Behauptung des Lemmas. ■

Wir kommen nun zu dem wesentlichen Teil des Beweises von Satz 2.2 und beweisen

Lemma 2.2 Es gelten die Voraussetzungen von Satz 2.2. Für die Lösung $Z(t)$ aus (2.13) sind (2.10), (2.11) erfüllt und es gilt

$$(2.14) \quad H(Z(t)) = h \quad (h \text{ fest})$$

Beh.: Die Lösung $Z(t)$ definiert eine Funktion S mit den folgenden Eigenschaften

$$(2.15) \quad \begin{cases} (i) & S \text{ ist reell analytisch in einem geeigneten Gebiet } \Sigma_c. \\ (ii) & S \text{ erfüllt die Schnittbedingung.} \end{cases}$$

Beh.: (iii) S kann in der Form geschrieben werden

$$(2.15) \quad \begin{cases} x_1 = u + x + y + \varepsilon f(x, y, \varepsilon) \\ y_1 = y + \varepsilon g(x, y, \varepsilon) \end{cases}$$

und $\varepsilon f, \varepsilon g$ sind reell analytische Funktionen und haben die Periode 2π in x .

Beweis zu (i): Wir legen die dreidimensionale Mannigfaltigkeit $\mathcal{R}$ fest durch

$$(2.16) \quad \mathcal{R} = \{ z \in \mathbb{C}^4 \mid H(z) = h, y_k = i \overline{x_k} \ (k=1,2), 2 \leq |x_1|^2 \leq 3 \}.$$

Bezeichne dann Σ die Fläche

$$(2.17) \quad \Sigma = \{ z \in \mathcal{R} \mid \operatorname{Im} \ln x_2 \equiv 0 \pmod{2\pi} \},$$

so müssen wir jetzt als erstes untersuchen, ob es sich bei Σ um eine wohldefinierte Menge handelt. Wir haben also nachzuprüfen, ob $|x_2(t)|$ in $\mathcal{R}$ nach oben wie nach unten beschränkt ist.

Aus dem Beweis zu Lemma 2.1 wissen wir, daß gilt $|h| < \frac{3}{2} |\lambda_1|$; somit erhalten wir für $z \in \mathcal{R}$:

$$|\lambda_2| |x_2|^2 \geq |\lambda_1| |x_1|^2 - \frac{3}{2} |\lambda_1| - c_3 \varepsilon^2 \geq \frac{1}{2} |\lambda_1| - c_3 \varepsilon^2 \geq \frac{1}{4} |\lambda_1|.$$

Also ist

$$|x_2(t)|^2 \geq \frac{1}{4} \mu^2 > 0$$

und $|x_2(t)|$ ist in $\mathcal{R}$ nach unten beschränkt. Analog sieht man die Beschränktheit von x_2 in $\mathcal{R}$ von oben:

$$|\lambda_2| |x_2|^2 = |\lambda_1| |x_1|^2 - h + \varepsilon^2 H_4 + \dots \leq$$

$$3 |\lambda_1| + \frac{3}{2} |\lambda_1| + c_4 \varepsilon^2 \leq 5 |\lambda_1|^{1/2}. \text{ Daraus ergibt sich}$$

$$|x_2| \leq (5 |\lambda_1| / |\lambda_2|)^{1/2}.$$

Insgesamt also ist Σ eine beschränkte Menge und wir schauen uns diese Fläche näher an. Wegen

$$x_2 = e^u + i v = e^u (\cos v + i \sin v) \quad (u, v \in \mathbb{R})$$

besteht gemäß (2.17) Σ aus all den Punkten in $\mathcal{R}$, für die gilt

$$(2.18) \quad x_2(t) = |x_2(t)| \quad .$$

Was folgt daraus? Habe x_1 die Parameterdarstellung $x_1 = a + i b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) und sei $x_2 = \phi(x_1, i\bar{x}_1, h)$ die Auflösung der Gleichung $H(z) = h$ nach h - diese Auflösung existiert, wie wir weiter unten sehen werden - so läßt sich also Σ darstellen in der Gestalt

$$\Sigma = \{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq a^2 + b^2 \leq 3, \phi(x_1, i\bar{x}_1, h) = |\phi(x_1, i\bar{x}_1, h)| \}.$$

Folglich können wir Σ als eine 2 dimensionale, reelle Mannigfaltigkeit in der Fläche $\mathcal{R}$ auffassen.

Auf Σ versuchen wir jetzt eine Abbildung zu definieren. Dazu bezeichne θ die Größe $\theta = \text{Im} \ln x_2$, dann gilt in $\mathcal{R}$ für hinreichend kleines ε in $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \text{Im} \frac{\dot{x}_2}{x_2} = \text{Im} \frac{H_1}{x_2} = \text{Im} \left(-\frac{\lambda_2 x_2}{x_2} + \frac{\varepsilon^2}{x_2} H_1 + \dots \right) \gg \\ &\gg \text{Im} \lambda_2 - c_5 \varepsilon^2 \gg \frac{2}{3} |\lambda_2|. \end{aligned}$$

Die vorletzte Ungleichung ist wegen der Beschränktheit von x_2 in $\mathcal{R}$ richtig. In der Zeit $3\pi/|\lambda_2|$ wächst also θ mindestens um 2π .

D.h. aber doch, daß eine Lösung (2.13), welche von einem Punkt

$P_0 \in \Sigma$ ausgeht und mindestens für die Zeitspanne $3\pi/|\lambda_2|$ in $\mathcal{R}$ bleibt, die Fläche Σ auf jeden Fall noch einmal und zwar nichttangentiell in einem zweiten Punkt P_1 schneidet. Wir definieren deshalb die folgende Abbildung S^* in Σ :

$$(2.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Treffe eine reelle Lösung (2.13) } \Sigma \text{ in } P_0 \text{ zum Zeitpunkt } t_0. \\ \text{Folgen wir dieser Lösung mit wachsendem } t \text{ bis sie die Fläche } \Sigma \text{ ein zweites Mal in } P_1 \text{ zur Zeit } t_1 \text{ wieder schneidet.} \\ S^* \text{ ist dann für } P_0 \text{ definiert und es gilt} \\ S^*(P_0) := P_1. \end{array} \right.$$

Es interessiert jetzt der genaue Definitionsbereich von S^* . Dazu schauen wir uns an, wie schnell $|x_1(t)|^2$ in einer Zeiteinheit wächst. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |x_1(t)|^2 &= 2 \operatorname{Re}(\overline{x_1} \dot{x}_1) = 2 \operatorname{Re}(\overline{x_1} H_{y_1}) = \\ &= 2 \operatorname{Re}(\lambda_1 |x_1|^2 + \overline{x_1} \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y_1} (H_4 + \dots)) \leq c_6 \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Die letzte Relation ist wegen der Holomorphie von H und der Beschränktheit von $|x_1|^2$ in $\mathcal{R}$ richtig.

Wir dürfen also schließen, daß für die Zeitspanne $t_1 - t_0 \leq 3\pi/|\lambda_2|$ die Funktion $|x_1(t)|^2$ höchstens um einen Betrag $0 < \delta = \delta(\varepsilon)$ wächst. Wir wählen ε so klein, daß gilt $0 < \delta < \frac{1}{3}$ und sehen somit, daß die obige Funktion S^* definiert ist auf der Menge

$$(2.20) \quad \Sigma^* := \{z \in \Sigma \mid 2 + \delta \leq |x_1(t)|^2 \leq 3 - \delta, 0 < \delta < \frac{1}{3}\}.$$

Wie wir aus dem obigen feststellen, operiert S^* auf einer reellen Mannigfaltigkeit und ist somit zunächst einmal nur eine reelle Abbildung. Um Satz 2.1 überhaupt anwenden zu können, benötigen wir jedoch eine reell analytische Funktion S ; deshalb bekümmern wir uns um eine geeignete Ausdehnung Σ_c von Σ in ein komplexes Gebiet. Wir beweisen dazu:

Lemma 2.3 Es gelte $y_2 = i x_2$. In dem komplexen Gebiet

$$(2.21) \quad 2 < |x_1|^2 < 3, \quad 2 < |y_1|^2 < 3, \quad |y_1 - i \overline{x_1}| < |x_1|$$

besitzt die Gleichung $H(z) = h$ eine analytische Auflösung nach x_2 :

$$x_2 = \phi(x_1, y_1, h, \varepsilon).$$

Bew.: Wegen $H = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \varepsilon^2 H_4 + \dots = h$ ergibt sich aus der Voraussetzung

$$(2.22) \quad i \lambda_2 x_2^2 = -\lambda_1 x_1 y_1 + h + O(\varepsilon^2),$$

wobei also $O(\varepsilon^2)$ eine analytische Funktion darstellt, welche mit Gliedern in ε der Ordnung 2 beginnt. Es gilt nun

$$|\lambda_1 x_1 y_1 - h| \geq 2|\lambda_1| - |h| \geq 2|\lambda_1| - \frac{3}{2}|\lambda_1| = |\lambda_1|/2$$

(Vor.) (s.o.)

Somit bleibt also die rechte Seite von (2.22) für hinreichend kleines ε von Null weg beschränkt.

Wie weiter triviale Rechnungen ergeben, bedingt die Voraussetzung $|y_1 - i\bar{x}_1| < |x_1|$ die Ungleichung $\operatorname{Im} x_1 y_1 > 0$, woraus wir folgern, daß das Produkt $x_1 y_1$ in einer Halbebene liegen muß. Die bisherigen Ergebnisse zusammengefaßt, liefern:

Die Funktion $- \lambda_1 x_1 y_1 + h + \sigma(\epsilon^2)$ ist auf eine Halbebene beschränkt und enthält nicht die Null, wenn nur die x_1, y_1 aus dem Gebiet (2.21) stammen und ϵ genügend klein ist.

Weiterhin ist bekannt, daß die Quadratwurzel im Komplexen eine zweideutige Funktion ist; das bedeutet, die Werte der Wurzel liegen auf einer zweiblättrigen Riemannschen Fläche. Außerdem ist es möglich, eine Halbebene genau auf ein Blatt der Riemannschen Fläche abzubilden. Der Nullpunkt ist dabei ein singulärer Punkt.

Wegen oben gibt es somit einen eindeutigen Zweig der Quadratwurzel von $- \lambda_1 x_1 y_1 + h + \sigma(\epsilon^2)$, der für alle Werte aus (2.21) definiert ist. Also ist die Funktion ϕ auf ganz (2.21) festgelegt und das Lemma ist bewiesen. ■

Bem.: In dem letzten Beweis wird nicht gesagt, welcher Zweig der Quadratwurzel von $- \lambda_1 x_1 y_1 + h + \sigma(\epsilon^2)$ genommen werden soll. In Obereinstimmung mit der Definition von Σ wählen wir den Zweig, der positiv ist, wenn $y_1 = i \bar{x}_1$ und $h = \bar{h}$.

Lemma 2.3 wird unter der Voraussetzung $y_2 = i x_2$ bewiesen. Aus (2.18) ergibt sich, daß die Variable x_2 in Σ reell ist. Da in $\mathcal{Q}$ noch die Realitätsbedingungen $y_k = i \bar{x}_k$ ($k=1,2$) gelten und $\Sigma \subset \mathcal{Q}$ ist, trifft also die Bedingung $y_2 = i x_2$ in Σ zu. Mit Hilfe von Lemma 2.3 ist es jetzt möglich, die komplexe Erweiterung Σ_c von Σ in folgender Weise vorzunehmen: Die komplexen Variablen x_1, y_1 werden aus dem Gebiet (2.21) hergenommen und x_2, y_2 bestimmen sich aus den analytischen Gleichungen

$$x_2 = \phi(x_1, y_1, h, \epsilon) \quad , \quad y_2 = i x_2 \quad .$$

Damit liegt eine eindeutig bestimmte, beschränkte komplexe Mannigfaltigkeit Σ_c vor und entsprechend (2.19) definieren wir auf Σ_c die komplexe Erweiterung S von S^* , indem wir einer komplexen Lösung unseres Systems (2.4) von einem Punkt in Σ_c bis zu ihrem nächsten Schnittpunkt mit Σ_c folgen. S ist eine analytische Abbildung, da sie vermöge der Vorschrift (2.19) durch analytische Lösungen eines analytischen Systems (2.4) definiert wird. Da noch offensichtlich gilt: $S|_{\Sigma^*} = S^*$, ist auch die reelle Analytizität von S offenkundig. Die Fläche Σ^* aus (2.20) läßt sich noch genau wie Σ zu einer komplexen Mannigfaltigkeit Σ_c^* ausdehnen und Σ_c^* ist der Definitionsbereich von S . Damit ist die Behauptung (i) von Lemma 2.2 vollständig bewiesen. ■

Um später einen Widerspruch herleiten zu können, beweisen wir:

Lemma 2.4 Sei $P_1 \in \Sigma_c$ ein Punkt auf der Lösungskurve (2.13) mit $2 \leq |x_1(t_1)|^2 \leq 2+\delta$. Dann wird P_1 durch S oder S^{-1} oder durch mehrfache Anwendung dieser Abbildungen auf einen Punkt P_2 mit $3-\delta \leq |x_1(t_2)|^2 \leq 3$ abgebildet.

Bew.: Seien $P_1 = (x_1(t_1), \dots, ix_2(t_1))$, $P_2 = (x_1(t_2), \dots, ix_2(t_2)) \in \Sigma_c$ mit $P_2 = S(P_1)$. Wegen oben (siehe vorletzte Seite) gilt nun

$$||x_1(t_1)|^2 - |x_2(t_2)|^2| < \delta.$$

Unter Beachtung von Lemma 2.1 enthält deswegen jeder Ring in Σ_c mit $a < |x_1|^2 < b$ und $0 < b-a < \delta$ wenigstens einen Schnittpunkt der Lösung (2.13) mit Σ_c . Damit wird zunächst einmal sichergestellt, daß es überhaupt einen Punkt $P_1 \in \Sigma_c$ in dem Streifen

$$2 \leq |x_1(t)|^2 \leq 2+\delta$$

gibt, der zusätzlich auf der Lösungskurve (2.13) von (2.4) liegt. Die Annahme nun, P_1 wird durch S oder durch S^{-1} oder durch mehrfache Anwendung dieser Abbildungen nicht auf einen Punkt P_2 in dem

Streifen $3-\delta \leq |x_1(t_2)|^2 \leq 3$ abgebildet, führt sofort durch Lemma 2.1 zu einem Widerspruch.

Wir kommen jetzt zu Teil (ii) der Behauptung von Lemma 2.2. Dazu zeigen wir die Inhaltstreue der in (2.19) definierten Abbildung S , was dann trivialerweise die Schnittbedingung von S induziert.

Bezeichne $\mathfrak{f}$ den Vektor $\mathfrak{f} := (\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3, \mathfrak{f}_4)$; weiter wollen wir unter $Z(t, \mathfrak{f})$ eine Lösung $Z(t)$ von (2.4) verstehen, welche der Anfangsbedingung $Z(0, \mathfrak{f}) = \mathfrak{f}$ gehorcht. Durch die Abbildung

$$(2.23) \quad \mathfrak{f} \longmapsto Z(t, \mathfrak{f}) \quad , \quad t \text{ fest} \quad ,$$

wird nun eine volumentreue Abbildung definiert. Denn für die holomorphe Hamilton-Funktion gilt die Beziehung

$$\sum_{k=1}^2 \{ (H_{y_k})_{x_k} + (-H_{x_k})_{y_k} \} = 0 \quad ,$$

woraus bekanntlich (vgl. [27], §21) dann die Inhaltstreue der Abbildung (2.23) folgt.

Sei $\mathfrak{f} \in \Sigma_c^*$ und Σ_c^* ist die komplexe Erweiterung (s.o.) der Menge Σ^* aus (2.20). Σ_c^* ist außerdem Definitionsbereich von S . Der Punkt $\mathfrak{f} \in \Sigma_c^*$ ist festgelegt durch $\mathfrak{f} = S(\mathfrak{j})$. S als reell analytische Abbildung bildet jede Umgebung $U \subset \Sigma_c$ von $\mathfrak{j}$ in eine Umgebung $U_1 \subset \Sigma_c$ von $\mathfrak{f}$ ab. Als nächstes bilden wir die 2 Zylinder B und B_1 über den Basen U und U_1 :

$$B = \{ z = Z(t, \mathfrak{f}) \mid \mathfrak{f} \in U, 0 \leq t \leq t_1 \}$$

$$B_1 = \{ z = Z(t, \mathfrak{f}) \mid \mathfrak{f} \in U_1, 0 \leq t \leq t_1 \} \quad .$$

Stellt jetzt R den Schlauch dar, der von den Lösungskurven (2.13) gebildet werden, welche U mit U_1 verbinden. Nach der Zeit t_1 geht R über in die Menge $R+B_1-B$ und wegen der Volumentreue von (2.23) haben R und $R+B_1-B$ daselbe 4-dimensionale Volumen. Es gilt

$$(2.24) \quad \int_{B_1} dz = \int_B dz \quad (dz = dx_1 dx_2 dy_1 dy_2)$$

Lassen wir nun t_1 in B_1 bzw. B gegen Null gehen, so schrumpfen die beiden Zylinder auf U_1 bzw. U zusammen und (2.24) geht dann über in

$$\int_U d\mathbf{f} = \int_{U_1} d\mathbf{f} \quad (d\mathbf{f} = d\mathbf{f}_1 d\mathbf{f}_2 d\mathbf{f}_3)$$

Die Inhaltstreue von S ist damit bewiesen und wir sind mit der Behauptung (ii) von Lemma 2.2 fertig.

Wir kommen jetzt zu der Schlußbehauptung (iii) von Lemma 2.2. Im folgenden werden mit $\mathbf{f}, \mathbf{z}, \mathbf{j}$ die Vektoren

$$\mathbf{f} := (f_1, \dots, f_n)^T, \quad \mathbf{z} := (z_1, \dots, z_n)^T, \quad \mathbf{j} := (j, z)^T$$

bezeichnet. Aus den Ausführungen von SIEGEL [25] wissen wir, daß es eine formale kanonische Potenzreihentransformation

$$(2.25) \quad x_k = \phi_k(\mathbf{j}) = f_k + \dots; \quad y_k = \gamma_k(\mathbf{j}) = z_k + \dots \quad (k=1, \dots, n)$$

gibt, welche eine analytische Hamilton-Funktion der Gestalt

$$(2.26) \quad H(x, y) = \sum_{k=1}^n \lambda_k w_k + \sum_{l=3}^{\infty} H_l(x, y)$$

in die eindeutig bestimmte Normalform

$$(2.27) \quad \tilde{H} = \tilde{H}(\omega_1, \dots, \omega_n) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \omega_k + \sum_{l=2}^{\infty} \tilde{H}_{2l}(\omega_1, \dots, \omega_n)$$

transformiert. Die λ_k ($k=1, \dots, n$) sind hier als rational unabhängig vorausgesetzt und die $\tilde{H}_{2l}$ sind wieder homogene Polynome vom Grad $2l$ in $\omega_1, \dots, \omega_n$. Unter $H^{(2n)}(\omega_1, \dots, \omega_n)$ verstehen wir noch das durch die Normalform $\tilde{H}$ eindeutig bestimmte Polynom

$$(2.28) \quad H^{(2n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \omega_k + \sum_{l=2}^{\infty} \tilde{H}_{2l}(\omega_1, \dots, \omega_n).$$

Jetzt gilt.

Lemma 2.5 Zu jedem $s \geq 2$ existiert eine konvergente kanonische Transformation T_{2s} mit

$$(2.29) \quad z = T_{2s}(\mathbf{j}) : \quad \begin{aligned} x_k &= \phi_k^{(2s)}(\mathbf{f}, \mathbf{z}) = f_k + \dots \\ y_k &= \gamma_k^{(2s)}(\mathbf{f}, \mathbf{z}) = z_k + \dots \end{aligned} ,$$

welche H aus (2.26) überführt in

$$\widehat{H}^{(2s)}(\mathfrak{f}, \mathfrak{z}) := H^{(2s)}(\omega_1, \dots, \omega_n) + G^{(2s+1)}(\mathfrak{f}, \mathfrak{z})$$

und $G^{(2s+1)}$ ist eine analytische Funktion in $\mathfrak{f}, \mathfrak{z}$, welche mit Gliedern der Ordnung $2s+1$ in $\mathfrak{f}, \mathfrak{z}$ beginnt.

Bew.: Die formale Transformation (2.25) läßt sich gemäß [25] darstellen in der Form

$$x_k = \mathfrak{f}_k + \sum_{l=2}^{\infty} \phi_{kl}(\mathfrak{f}, \mathfrak{z}) \quad , \quad y_k = \mathfrak{z}_k + \sum_{l=2}^{\infty} \tau_{kl}(\mathfrak{f}, \mathfrak{z}) \quad (k=1, \dots, n)$$

und die ϕ_{kl}, τ_{kl} sind homogene Polynome vom Grad l in $\mathfrak{f}, \mathfrak{z}$. Es gilt nun nach Voraussetzung

$$(2.30) \quad H(\phi_1, \dots, \phi_n, \tau_1, \dots, \tau_n) = \widetilde{H}(\omega_1, \dots, \omega_n) \quad .$$

Wir definieren jetzt die konvergente kanonische Transformation

$$z = T_{2s}(\mathfrak{f}) : x_k = \mathfrak{f}_k + \sum_{l=2}^{2s} \phi_{kl}(\mathfrak{f}, \mathfrak{z}), \quad y_k = \mathfrak{z}_k + \sum_{l=2}^{2s} \tau_{kl}(\mathfrak{f}, \mathfrak{z})$$

Dann wird wegen (2.30) klar, daß gilt

$$H(T_{2s}(\mathfrak{f})) = \widehat{H}^{(2s)}(\mathfrak{f}, \mathfrak{z}) \quad ,$$

denn die ϕ_{ki}, τ_{ki} in H_r mit $r > 2s$ eingesetzt, können wegen der Homogenität von H_r keine zusätzlichen Glieder in $\widetilde{H}_{2l}^{(2s)} (2 \leq l \leq s)$ erzeugen. ■

Bemerkung: Den Darlegungen in [25] entnehmen wir noch folgenden wichtigen Sachverhalt: Ist die Hamilton-Funktion H reell, so kann

$T_{2s}(\mathfrak{f})$ so gewählt werden, daß auch $\widehat{H}^{(2s)}$ wieder eine konvergente reelle Potenzreihe darstellt. Mithin ist also T_{2s} eine reelle Transformation.

Wir wenden nun Lemma 2.5 für $s = 2$ auf die Hamilton-Funktion (2.3) bzw. (2.9) an. Demzufolge dürfen wir also H_4 aus (2.3) bzw. (2.9) in der Gestalt

$$H_4(w_1, w_2) = \frac{1}{2} \{ \mu_{11} w_1^2 + \mu_{12} w_1 w_2 + \mu_{22} w_2^2 \}$$

annehmen.

Aus Voraussetzung c) des Satzes 2.2 wissen wir, daß L die Normalform $\widetilde{H}$ von H nicht teilt. Der Einfachheit halber nehmen wir

o.B.d.A. an, daß L bereits das Polynom H_4 schon nicht teilt.

Diese Annahme hat für die Koeffizienten von H_4 eine wichtige Auswirkung; allgemein gilt:

Lemma 2.6 Gegeben ist das homogene Polynom H_{21} der Gestalt

$$H_{21}(w_1, w_2) = \sum_{j=0}^1 h_j w_1^{1-j} w_2^j .$$

Der Linearteil L teilt H_{21} genau dann, wenn die folgende Determinantenbedingung gilt:

$$(2.31) \quad D := \sum_{j=0}^1 (-1)^j \lambda_1^j \lambda_2^{1-j} h_j = 0 .$$

Bew.: Zuerst zeigen wir die Notwendigkeit der Bedingung. Aus L/H_{21} folgt zunächst die Gültigkeit von

$$(2.32) \quad H_{21}(w_1, w_2) = L K_{21-2}(w_1, w_2) ;$$

dabei ist K_{21-2} ein Polynom vom Höchstgrad $21-2$ in w_1, w_2 und hat die Darstellung

$$K_{21-2}(w_1, w_2) = \sum_{j=0}^{1-1} k_j w_1^{1-1-j} w_2^j .$$

Koeffizientenvergleich in (2.32) liefert die Gleichungen:

$$\begin{aligned} h_0 &= \lambda_1 k_0 \\ h_1 &= \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_0 \\ &\vdots \\ h_j &= \lambda_1 k_j + \lambda_2 k_{j-1} \\ &\vdots \\ h_{1-1} &= \lambda_1 k_{1-1} + \lambda_2 k_{1-2} \\ h_1 &= \lambda_2 k_{1-2} . \end{aligned}$$

Man sieht nun sofort, daß $h_j = h_j(h_0, \dots, h_{j-1}, k_j)$ ($j = 1, \dots, 1$). Speziell liefert die letzte Gleichung

$$h_1 = h_1(h_0, \dots, h_{1-1}) ,$$

womit die lineare Abhängigkeit der Koeffizienten von H_{21} dokumentiert wird. Nach leichter Rechnung liefert die letzte Gleichung explizit:

$$h_1 = \lambda(h_{1-1} - \lambda(h_{1-2} - \lambda(h_{1-3} - \dots - \lambda(h_1 - h_0) \dots))$$

Multiplikation der ganzen Gleichung mit λ_1^1 zeigt nun, daß jeder Koeffizient von h_j ($0 \leq j \leq 1$) gleich ist, nämlich $(-1)^{1-j} \lambda_1^{1-j} \lambda_2^j$.

Wir bekommen deshalb

$$\sum_{j=0}^1 (-1)^{1-j} \lambda_1^{1-j} \lambda_2^j h_{1-j} = 0.$$

Diese Gleichung jedoch zieht (2.31) offensichtlich nach sich.

Wie aus dem Beweisverlauf ersichtlich wird, ist die Determinantenbedingung (2.31) auch hinreichend dafür, daß L das Polynom H_{21} teilt. ■

Bem.: Es sei hier festgehalten, daß die Existenz des Lemmas 2.6 die tiefere Ursache dafür ist, daß wir O.B.d.A. annehmen durften, $L \nmid H_4$. An anderer Stelle werden wir noch einmal darauf zurückkommen. Jetzt halten wir die für später wichtige Beziehung fest, daß wegen der Annahme $L \nmid H_4$ Lemma 2.6 zufolge für die Koeffizienten von H_4 gilt

$$(2.33) \quad D = \mu_{11} \lambda^2 - 2 \mu_{12} \lambda_1 \lambda_2 + \mu_{22} \lambda_2^2 \neq 0.$$

Im weiteren Verlauf der Ausführungen bestimmen wir nun die Gestalt von S . Dabei haben wir mit der Schwierigkeit zu kämpfen, daß S durch Lösungen von (2.4), welche wir gar nicht explizit vorliegen haben, definiert wird. Deshalb suchen wir nach einer Abbildung S^* , deren genaue Gestalt wir kennen und die sich nicht allzusehr von S unterscheidet. Dazu ersetzen wir als erstes die Hamilton-Funktion in (2.9) durch das Polynom $H^{(4)} := L + \varepsilon^2 H_4$ und betrachten dann das Hamilton-System

$$(2.34) \quad \dot{x}_k = H_{y_k}^{(4)} = H_{w_k}^{(4)} x_k, \quad \dot{y}_k = -H_{x_k}^{(4)} = H_{w_k}^{(4)} y_k \quad (k = 1, 2).$$

Es ist jetzt offensichtlich, daß

$$(2.35) \quad Z^*(t) : x_k(t) = x_k(0) e^{t H_{w_k}^{(4)}}, \quad y_k(t) = y_k(0) e^{-t H_{w_k}^{(4)}} \quad (k=1, 2)$$

eine analytische Lösung von (2.34) darstellt, welche uns gemäß (2.19)

eine Abbildung S^* auf einer entsprechenden Fläche Σ^* definiert. Welche Gestalt hat nun S^* ? Darüber Auskunft gibt

Lemma 2.7 Gegeben ist die formale Normalform $\tilde{H}$ der Gestalt

$$(2.36) \quad \tilde{H}(w_1, w_2) = L + \sum_{l=2}^{\infty} \epsilon^{2l-2} \tilde{H}_{2l}(w_1, w_2)$$

mit homogenen Polynomen H_{2l} vom Grad $2l$ in w_1, w_2 .

Dann wird durch das Hamilton-System

$$(2.33) \quad \dot{x}_k = \tilde{H}_{w_k} x_k, \quad \dot{y}_k = -\tilde{H}_{w_k} y_k \quad (k = 1, 2)$$

vermöge der Vorschrift (2.19) eine formale Abbildung $\tilde{S}$ definiert, welche das Aussehen hat

$$(2.38) \quad x_1(T) = x_1(0) e^{iQ}, \quad y_1(T) = y_1(0) e^{-iQ}$$

und Q, T sind die beiden formalen Reihen

$$(2.39) \quad Q := 2\pi \tilde{H}_{w_1} / \tilde{H}_{w_2}$$

$$(2.40) \quad T := 2\pi i / \tilde{H}_{w_2}$$

Bew.: Die formalen Lösungen von (2.37) können explizit in der Form

$$(2.41) \quad x_k(t) = x_k(0) e^{t\tilde{H}_{w_k}}, \quad y_k(t) = y_k(0) e^{-t\tilde{H}_{w_k}} \quad (k = 1, 2)$$

angegeben werden. Die $x_k(0), y_k(0)$ sind die Anfangswerte und wir setzen voraus, daß $P_0 := (x_1(0), \dots, y_2(0))$ ein Punkt auf der Fläche

$$\tilde{\Sigma} := \{ z \mid \tilde{H}(z) = h, \operatorname{Im} \ln x_2 = 0 \pmod{2\pi} \}$$

darstellt. Von P_0 ausgehend folgen wir jetzt der Lösung (2.41) eine Zeitspanne T , bis sie wieder die Fläche $\tilde{\Sigma}$ in $P_1 = (x_1(T), \dots, y_2(T))$ schneidet. Wir haben dann die Beziehung

$$(2.42) \quad x_k(T) = x_k(0) e^{T\tilde{H}_{w_k}}, \quad y_k(T) = y_k(0) e^{-T\tilde{H}_{w_k}} \quad (k = 1, 2).$$

Wir bestimmen die Zeitdauer T . Dazu erinnern wir uns der Tatsache, daß mit λ_1, λ_2 rein imaginär auch die Reihen $\tilde{H}_{w_1}, \tilde{H}_{w_2}$ wegen den Realitätsbedingungen ebenfalls rein imaginär sind. Da T aber eine reelle Zahl sein muß, haben wir also

$$\operatorname{Im} \ln x_2(T) = T \tilde{H}_{w_2} / i$$

Wegen Definition (2.19) ist nun T so festgelegt, daß gelten muß

$$\operatorname{Im} \ln x_2(T) = 2\pi$$

Die beiden letzten Gleichungen ergeben zusammen (2.40). (2.39) und damit auch (2.38) erhält man, indem in (3.42) für T aus (2.40) eingesetzt wird.

Am Schluß halten wir noch fest, daß T eine Funktion der Anfangswerte $x_1(0), \dots, y_1(0)$ darstellt; denn $\tilde{H}$ als Normalform ist eine nur von w_1, w_2 abhängige Funktion; wegen (2.41) ist aber gerade

$$w_k(t) = x_k(t)y_k(t) = x_k(0)y_k(0) \quad (k=1,2),$$

was obige Aussage als richtig erweist. ■

Dieses letzte Lemma, obwohl nur für formale Reihen bewiesen, werden wir jetzt auf das analytische Hamilton-System (2.34) anwenden. Laut Aussage des Hilfssatzes 2.7 definiert also die Lösung (2.35) eine analytische Abbildung S^* , welche durch (2.38) - (2.40) fixiert ist und die Form hat

$$(2.43) \quad S^* : \begin{cases} x_1(T) = x_1(0) e^{iQ}, & y_1(T) = y_1(0) e^{-iQ} \\ Q = 2\pi H_{w_1}^{(4)}/H_{w_2}^{(4)}, & T = 2\pi i / H_{w_2}^{(4)} \end{cases}.$$

Außerdem sind wir gemäß den Ausführungen zu (2.20) in der Lage, den Definitionsbereich von S^* anzugeben. Es gilt $S^* : \Sigma^{(2)*} \rightarrow \Sigma^{(2)}$ mit den Bereichen

$$(2.44) \quad \begin{aligned} \Sigma^{(2)*} &= \{ z \in \mathbb{C}^4 \mid H^{(4)}(z) = h, \ 2 - \delta \leq |x_1(t)|^2 \leq 3 - \delta, 0 < \delta < \frac{1}{2} \} \\ \Sigma^{(2)} &= \{ z \in \mathbb{C}^4 \mid H^{(4)}(z) = h, \ 2 \leq |x_1(t)|^2 \leq 3 \} \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, daß aufgrund von (2.43) die Abbildung S^* in die Form (2.15) (iii) gebracht werden kann. Als erstes lösen wir dazu die Gleichung $H^{(4)}(w_1, w_2, \epsilon) = h$ nach w_2 auf und erhalten nach leichter Rechnung die wegen Lemma 2.3 analytische Lösung

$$(2.45) \quad w_2 = w_2(w_1, h, \epsilon) = \frac{1}{\lambda_2}(h - \lambda_1 w_1) + o(\epsilon^2)$$

und $\sigma(\varepsilon^2)$ ist hier ein Polynom in w_1, h , welches mit Gliedern in ε^2 beginnt. Es läßt sich jetzt Q aus (2.43) schreiben

$$(2.46) \quad \begin{aligned} Q \Big|_{w_2=w_2(w_1, h, \varepsilon)} &= 2\pi \frac{\lambda_1 + \varepsilon^2 (\mu_{11} w_1 + \mu_{12} w_2)}{\lambda_2 + \varepsilon^2 (\mu_{21} w_1 + \mu_{22} w_2)} \Big|_{w_2=w_2(w_1, h, \varepsilon)} \\ &= 2\pi \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\varepsilon^2}{\lambda_2^2} (D w_1 + (\mu_{12} \lambda_2 - \mu_{22} \lambda_1) h) \right\} + \sigma(\varepsilon^4) \end{aligned}$$

D stammt aus (2.33) und Q ist offensichtlich analytisch, denn der Nenner bleibt für hinreichend kleines ε von Null weg beschränkt. Mit

$$\omega := 2\pi \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\varepsilon^2}{\lambda_2^2} (\mu_{12} \lambda_2 - \mu_{22} \lambda_1) h \right) \in \mathbb{R}, \quad R := 2\pi i D / \lambda_2^3 \in \mathbb{R}$$

läßt sich nun die Abbildung (2.43) schreiben

$$(2.47) \quad \begin{aligned} x_1(T) &= x_1(0) e^{i\omega + \varepsilon^2 i R |x_1(0)|^2} + \sigma(\varepsilon^3) \\ y_1(T) &= y_1(0) e^{-i\omega - \varepsilon^2 i R |x_1(0)|^2} + \sigma(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

und $\sigma(\varepsilon^3)$ sind analytische Funktionen in w_1, h, ε , welche mit Gliedern der Ordnung 3 in ε beginnen. Wegen $x_1(0) = |x_1(0)| e^{i\varphi}$,

$w_1(t) = w_1(0) = i |x_1(0)|^2$ führen wir die Polarkoordinaten

$$\varphi, \quad r := |x_1(0)|$$

ein und die letzte Abbildung läßt sich dann mit

$$(2.48) \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= \omega + \varphi + R r^2 \varepsilon^2 + \sigma(\varepsilon^3) \\ r_1 &= r + \sigma(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

identifizieren. Und wieder sind die $\sigma(\varepsilon^3)$ analytische Funktionen, welche mit Gliedern der Ordnung 3 in ε beginnen und von $w_1 = i r^2$, h, ε abhängen und deshalb trivialerweise 2π -periodisch in φ sind.

Machen wir jetzt noch die Substitution

$$x = \varphi, \quad y = R r^2 \varepsilon^2,$$

so geht (2.48) über in die Gestalt

$$(2.49) \quad \begin{aligned} x_1 &= \omega + x + y + \sigma(\varepsilon) \\ y_1 &= y + \sigma(\varepsilon) \end{aligned}$$

und $\sigma(\varepsilon)$ ist analytisch, 2π -periodisch in x und beginnt mit Gliedern der Ordnung 1 in ε . An dieser Stelle halten wir fest, daß

die oben vorgenommene Substitution $y \rightarrow Rr^2 \varepsilon^2$ nur möglich ist, weil $R = 2\pi i D / \lambda_2^3$ wegen (2.33) von Null verschieden ist.

Unser Ziel ist es zu zeigen, daß S in die Gestalt (2.49) gebracht werden kann. Dazu überlegen wir uns, daß S durch Lösungen des reell analytischen Systems

$$(2.50) \quad \dot{x}_k = H_{w_k}^{(4)} x_k + \sigma(\varepsilon^3), \quad \dot{y}_k = -H_{w_k}^{(4)} y_k + \sigma(\varepsilon^3)$$

definiert wird. Hier sind die $\sigma(\varepsilon^3)$ reell analytische Funktionen in x, y , welche mit Gliedern der Ordnung 3 in ε beginnen. Da sich die beiden Systeme (2.34) und (2.50) erst ab Gliedern der Ordnung 3 in ε unterscheiden, trifft dies auch zu für die entsprechenden Lösungen der beiden Systeme. Aufgrund der Ausführungen von oben erzeugt deshalb die Lösung von (2.50) die Abbildung S mit der Gestalt (2.47), (2.48). Selbstverständlich handelt es sich jetzt bei den $\sigma(\varepsilon^3)$ um ganz andere Funktionen, als die, welche wir in (2.47), (2.48) vorliegen haben. Aber wir wissen, daß die $\sigma(\varepsilon^3)$ reell analytische Funktionen sein müssen, denn S ist wie aus Teil (i) der Behauptung von Lemma 2.2 hervorgeht, reell analytisch.

S besitzt also die Gestalt (2.48) und wie oben gelangen wir endlich zu der gewünschten Form (2.49) für S . Wir sind mit dem Beweis des Lemmas 2.2 fertig, wenn wir noch anschließen

Bemerkung: Lemma 2.2 wird bewiesen unter der Annahme $L \neq H^{(4)}$. Die Voraussetzung c) von Satz 2.2 sagt aber nur $L \neq \tilde{H}$ und $\tilde{H}$ ist die Normalform von H . Im allgemeinen Fall müssen wir also davon ausgehen, daß es ein $n \geq 2$ gibt, sodaß $L/H^{(2n-2)}$ aber $L \neq H^{(2n)}$. Sei entgegen unserer Annahme $n \geq 2$. Die Determinantenbedingung in Lemma 2.6 garantiert uns jetzt:

$$D = D^{(n)} := \sum_{j=0}^n (-1)^j \lambda_1^j \lambda_2^{n-j} h_j \neq 0$$

und die h_j ($0 \leq j \leq n$) sind die Koeffizienten des homogenen Polynoms $\tilde{H}_{2n}(w_1, w_2)$ (siehe (2.28)). Anstelle von S betrachten wir nun

eine (2.19) entsprechend definierte Abbildung $S^{(n)}$, welche aber hier durch Lösungen des Systems

$$(2.51) \quad \dot{x}_k = H_{y_k}^{(2n)} + O(\varepsilon^{2n-1}), \quad \dot{y}_k = -H_{x_k}^{(2n)} + O(\varepsilon^{2n-1})$$

definiert wird. Analoge Überlegungen zu oben zeigen, daß sich $S^{(n)}$ in eine zu (2.49) ähnliche Gestalt bringen läßt. Dabei ist entscheidend, daß $D^{(n)} \neq 0$ ist. Weiter halten wir fest, daß wenn die Ruhelage von (2.4) nicht stabil ist, dies auch gültig ist für die Gleichgewichtslage von (2.51), denn dieses System geht aus (2.4) aufgrund der konvergenten kanonischen Transformation T_{2n} aus (2.29) hervor.

Ist also $L/H^{(4)}, \dots, L/H^{(2n-2)}$ aber $L/H^{(2n)}$, so nehmen wir das Hamilton-System (2.51) als Ausgangspunkt unserer Überlegungen und die Annahme, die Ruhelage von (2.51) ist nicht stabil, führt uns genau wie oben zu einer Abbildung $S = S^{(n)}$ mit denselben Eigenschaften, wie sie S aus (2.15) besitzt.

Aus all dem wird klar, daß wir, wie oben geschehen, O.B.d.A. $L/H^{(4)}$ voraussetzen dürfen.

Wir schließen diesen Abschnitt mit dem entgeltigen Nachweis von Satz 2.2 ab.

Genügt das oben definierte ω den Ungleichungen (2.2), so folgt aus Satz 2.1, daß die Abbildung S aus Lemma 2.2 eine invariante Kurve in dem Streifen

$$2 + \delta \leq |x_1(t)|^2 \leq 3 - \delta$$

besitzt. Die Existenz einer solchen invarianten Kurve steht aber in einem offensichtlichen Widerspruch zu Lemma 2.4. Somit ist die Annahme, die Gleichgewichtslösung von (2.4) ist nicht stabil, falsch und der Widerspruchsbeweis ist damit erbracht.

0.3 Die Problemstellung und Formulierung der Hauptergebnisse

Eine Zusammenfassung der Ergebnisse des ersten Abschnitts liefert, daß die Gleichgewichtslösung eines Hamilton-Systems der Form

$$(3.1) \quad \dot{x}_k = H_{y_k} = \lambda_k x_k + \dots, \quad \dot{y}_k = -H_{x_k} = -\lambda_k y_k + \dots \quad (k = 1, 2)$$

stabil ist, wenn nur eine der folgenden Bedingungen (3.2)₁ - (3.2)₃ gelten:

$$(3.2)_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1, \lambda_2 \text{ rein imaginär; } \mu > 0; \end{array} \right.$$

$$(3.2)_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1, \lambda_2 \text{ rein imaginär; } \mu < 0; \mu \text{ irrational;} \\ L \text{ teilt nicht die Normalform } \tilde{H} \text{ von } H. \end{array} \right.$$

$$(3.2)_3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1, \lambda_2 \text{ rein imaginär; } \mu \text{ irrational;} \\ \text{für beliebige } g_1, g_2 \in \mathbb{R} \text{ mit } |g_1| + |g_2| > 0 \text{ gilt} \\ |\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2| > c(|g_1| + |g_2|)^{-\nu} \text{ mit } c, \nu > 0; \\ \text{die Normalform } \tilde{H} \text{ von } H \text{ ist eine Funktion von } L. \end{array} \right.$$

Diese vorliegenden Resultate zeigen nun deutlich, daß im wesentlichen nur noch zu untersuchen bleibt, ob die singuläre Lösung von (3.1) stabil ist, wenn die Voraussetzungen

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1, \lambda_2 \text{ rein imaginär; } \mu < 0; \mu \text{ irrational;} \\ L \text{ teilt die Normalform } \tilde{H} \text{ von } H; \tilde{H} \neq H(L) \end{array} \right.$$

erfüllt sind.

Es war unsere Aufgabe, sich mit diesem ausstehenden Fall (3.3) zu beschäftigen. Abschließend konnte das offenstehende Problem nicht behandelt werden; jedoch wird gezeigt

2. Hauptsatz

Vor.: Gegeben ist das analytische Hamilton-System (3.1); es gelten die Voraussetzungen in (3.3) und λ_1, λ_2 erfüllen noch zusätzlich die Ungleichungen in (1.8).

Beh.: Auf der Energiefläche $h = 0$ ist die Ruhelage stabil.

Wir werden jetzt versuchen, eine Motivation der wichtigsten Schritte zur Herleitung des 2. Hauptsatzes zu geben.

Der entscheidende Anstoß, das in (3.3) umschriebene Problem anzugehen, war der Beweisgang zu Satz 5. Man steht nämlich dort vor der Frage, wie sich die Beweisführung ändert, wenn man in Satz 2.2 die Voraussetzung c) durch die Bedingung:

L teilt die Normalform $\tilde{H}$ von H

ersetzt. An Stelle einer Abbildung der Gestalt (2.15) (iii) erzeugt diese abgewandelte Voraussetzung eine Abbildung in der Form

$$(3.4) \quad \begin{aligned} x_1 &= \omega + x + f(x, y) \\ y_1 &= y + f(x, y) \end{aligned}$$

Es handelt sich also hier ebenfalls um eine gestörte Twistabbildung; doch ist der Satz 2.1 darauf nicht anwendbar, da dem Winkel x_1 ein linearer Radialanteil y fehlt. Trotzdem kann man sich die Frage vorlegen, ob denn nicht auch die Abbildung (3.4) invariante Kurven besitzt. Jedoch schon bei der formalen Lösung dieses Problems zeigen sich unüberwindliche Schwierigkeiten, da sich gewisse Differenzengleichungen nicht lösen lassen. Deshalb ist man jetzt gezwungen das System (3.4) durch Hinzufügen geeigneter Parameter so zu verändern, daß die neu entstandene Abbildung invariante Kurven besitzt. Das Problem so anzugehen wurde durch die Arbeit von MOSER [13] angeregt. Dort wird nämlich nach periodischen Lösungen spezieller gestörter Differentialgleichungen gesucht, welche dieselben charakteristischen Zahlen besitzen sollen, wie die Lösungen des ungestörten Systems. Durch Addieren eindeutig bestimmter Parameter zu dem gestörten System war es möglich, das gesteckte Ziel zu erreichen.

Wegen der Ähnlichkeit der Probleme - hier wie in [13] - ist zu erwarten, daß die oben aufgeworfene Frage nach invarianten Kurven von (3.4) entsprechend zu lösen ist wie die Problemstellung in [13].

Tatsächlich zeigen wir:

1. Hauptsatz

Vor.: a) Gegeben ist die Abbildung A der Gestalt

$$(3.4) \quad \begin{aligned} x_1 &= \omega + x + f(x, y) \\ y_1 &= y + g(x, y) \end{aligned}$$

wobei f, g reell analytische Funktionen in

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |\operatorname{Im} x| < r_0, |y| < r_0\}$$

sind und die Periode 2π in x haben.

b) f, g genügen en Abschätzungen

$$(3.5) \quad |f(x, y)| + |g(x, y)| < M_0 \quad \text{für } (x, y) \in D.$$

c) ω erfüllt die Ungleichungen

$$(2.2) \quad |(\omega/2\pi)^k - p| \geq ck^{-\beta} \quad (k, p = 1, 2, \dots)$$

mit positiven Konstanten $c > 0, \beta > 1$.

d) A ist inhaltstreu und genügt somit der Schnittbedingung.

Beh.: Es existiert ein Parameter a derart, daß das System

$$(3.6) \quad \begin{aligned} x_1 &= \omega + x + f(x, y) + a \\ y_1 &= y + g(x, y) \end{aligned}$$

eine reell analytische, invariante Kurve K besitzt.

Die Kurve K hat die Parameterdarstellung

$$(3.7) \quad \begin{aligned} x_1 &= \xi + U(\xi), & U(\xi) &= U(\xi + 2\pi) \\ y_1 &= V(\xi), & V(\xi) &= V(\xi + 2\pi) \end{aligned}$$

die auf K induzierte Abbildung ist eine Translation der Form

$$(3.8) \quad \xi_1 = \omega + \xi.$$

Für die Mittelwerte $[U], [V]$ gilt noch

$$(3.9) \quad [U] = [V] = 0.$$

Der Satz wird dadurch bewiesen, daß man mit Hilfe der Newton'schen Methode iterativ eine bestimmte Funktionalgleichung löst.

Wir stellen noch fest, daß die obige Voraussetzung d) etwas schwächer ist, als die entsprechende, allgemeinere Bedingung in Satz 2.2. Genügt nämlich A der Schnittbedingung, so läßt sich nicht mehr zeigen, daß die Abbildung

$$z = A + \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{C} \text{ bel.})$$

ebenfalls wieder die Schnittbedingung besitzt. Im Beweiskgang des 1. Hauptsatzes muß jedoch garantiert werden, daß solche Abbildungen wie oben die Schnittbedingung erfüllen. Das kann durch die Inhaltstreue von A erreicht werden.

Wie läßt sich nun der 1. Hauptsatz beim Nachweis des 2. Hauptsatzes verwenden? Die Konzeption des Beweiskganges des 2. Hauptsatzes entspricht der des Satzes 2.2. Unter der Bedingung (3.3) werden wir wieder annehmen, daß die Gleichgewichtslösung von (3.1) nicht stabil ist. So wie wir in Abschnitt 2 zu der Abbildung S aus (2.15) (iii) gelangen, führt uns die obige Annahme zu einer reell analytischen Abbildung der Gestalt (3.4), welche durch Lösungen $Z(t)$ von (3.1) analog zu Definition (2.19) festgelegt wird. Es gilt der Energieerhaltungssatz, folglich haben wir $H(Z(t)) = h$, h fest.

Es ist nun möglich, den 1. Hauptsatz auf die so erhaltene Abbildung (3.4) anzuwenden. Wir erhalten also einen Parameter a , sodaß die Abbildung der Form (3.6) eine invariante Kurve in einem bestimmten Streifen besitzt. Entscheidend ist jetzt, daß gemäß (3.3) L die Normalform $\tilde{H}$ von H teilt. Dadurch läßt sich die folgende, sehr wichtige Abhängigkeit des Parameters a von h zeigen

$$(3.10) \quad a = a(h) = h b(h)$$

und b ist eine komplexe Zahl.

Ist $h = 0$, so geht demnach die Abbildung (3.6) in (3.4) über und der erste Hauptsatz garantiert die Existenz invarianter Kurven. Der Argumentation des 2. Abschnitts folgend, bedeutet dies jedoch nichts anderes, als daß auf der Energiefläche $h = 0$ Stabilität herrscht und der 2. Hauptsatz ist damit bewiesen.

§ 1 Ein Existenzsatz über invariante Kurven

In diesem Paragraphen beweisen wir den bereits formulierten 1. Hauptsatz.

Nachdem wir im folgenden ersten Abschnitt schnell eine normalisierte formale Lösung dieses Satzes finden werden, muß in den anschließenden Abschnitten die Analytizität der durch das Konstruktionsverfahren eindeutig bestimmten invarianten Kurve K gezeigt werden. Bei diesem Nachweis bedienen wir uns des verallgemeinerten Newtonschen Iterationsverfahrens.

1.1 Formale Lösung des Problems

Den Untersuchungen über die formale Lösung des Problems stellen wir die Definition des Mittelwertes einer Funktion $F = F(\xi, \eta)$ voran, welche 2π -periodisch in ξ ist. Es gilt

$$[F](\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\xi, \eta) d\xi.$$

Besitzt noch F die Fourierreihenentwicklung

$$F(\xi, \eta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} F_k(\eta) e^{ik\xi},$$

so ist der Mittelwert $[F]$ bekanntlich gegeben durch

$$[F](\eta) = F_0(\eta).$$

Diesen Sachverhalt werden wir des öfteren benutzen. Wir zeigen:

Lemma 1.1 Gegeben sind die Voraussetzungen des 1. Hauptsatzes. Nur werden die Funktionen f, g ersetzt durch $\varepsilon f(x, y, \varepsilon)$, $\varepsilon g(x, y, \varepsilon)$ und $\varepsilon f, \varepsilon g$ sind analytische Funktionen in einem Gebiet $D^* \subset \mathbb{C}^2$. Dann existiert eine formale Potenzreihe $a = a(\varepsilon)$, sodaß das System

$$(1.1) \quad x_1 = \omega + x + \varepsilon f(x, y, \varepsilon) + a(\varepsilon), \quad y_1 = y + \varepsilon g(x, y, \varepsilon)$$

eine eindeutige, invariante, formale Kurve $K = K(\xi, \varepsilon)$ der Gestalt

$$x_1 = \xi + U(\xi, \varepsilon), \quad y_1 = V(\xi, \varepsilon)$$

besitzt. U, V sind formale Reihen mit der Periode 2π in ξ mit

$$(1.2) \quad [U] = [V] = 0.$$

Bew.: Wegen der Analytizität von $\epsilon f, \epsilon g$ in D^{π} dürfen wir $\epsilon f, \epsilon g$ in der Form

$$\epsilon f(x, y, \epsilon) = \epsilon \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x, y) \epsilon^k, \quad \epsilon g(x, y, \epsilon) = \epsilon \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x, y) \epsilon^k$$

als gegeben voraussetzen. Für die noch unbekannten Reihen U, V und $a(\epsilon)$ machen wir entsprechende Potenzreihenansätze:

$$U(\xi, \epsilon) := \epsilon u(\xi, \epsilon) = \epsilon \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\xi) \epsilon^k$$

$$V(\xi, \epsilon) := \epsilon v(\xi, \epsilon) = \epsilon \sum_{k=0}^{\infty} v_k(\xi) \epsilon^k$$

$$a(\epsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \epsilon^k.$$

Die Aufgabe besteht jetzt darin, die unbekannten Funktionen u_k, v_k und die Werte a_k rekursiv zu bestimmen.

Wenn $K = K(\xi, \epsilon)$ eine invariante Kurve von (1.2) ist und zusätzlich die Aussage bzgl. (0.3.8) wahr sein soll, müssen folgende Gleichungen gelten

$$\begin{aligned} \omega + \xi + \epsilon u(\xi, \epsilon) + \epsilon f(\xi + \epsilon u, \epsilon v) + a(\epsilon) &= \omega + \xi + \epsilon u(\omega + \xi, \epsilon) \\ \epsilon v(\xi, \epsilon) + \epsilon g(\xi + \epsilon u, \epsilon v) &= \epsilon v(\omega + \xi, \epsilon). \end{aligned}$$

Mit den obigen Ansätzen lassen sich diese Gleichungen ausführlich schreiben

$$\begin{aligned} \epsilon \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (u_k(\omega + \xi) - u_k(\xi)) \epsilon^k \right\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\xi + \epsilon u, \epsilon v) \epsilon^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \epsilon^k \\ (1.3) \quad \epsilon \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (v_k(\omega + \xi) - v_k(\xi)) \epsilon^k \right\} &= \sum_{k=0}^{\infty} g_k(\xi + \epsilon u, \epsilon v) \epsilon^k. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert für $k = 0$:

$$\begin{aligned} u_0(\omega + \xi) - u_0(\xi) &= f_0(\xi, 0) + a_1 \\ (1.4) \quad v_0(\omega + \xi) - v_0(\xi) &= g_0(\xi, 0) \end{aligned}$$

Es erscheint nun wünschenswert, die Koeffizienten der formalen Reihen u_0, v_0, u_n, v_n mit $n \in \mathbb{N}$ reell analytisch zu haben. Da aber die vorhandenen Funktionen alle 2π -periodisch in ξ sind,

bietet sich hier jedoch an, die Gleichungen in (1.4) mit geeigneten Fourierreihenansätzen zu lösen. Sei also

$$\begin{aligned} u_0(\xi) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} u_l^{(0)} e^{il\xi} ; & v_0(\xi) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} v_l^{(0)} e^{il\xi} \\ f_0(\xi, 0) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{f}_l e^{il\xi} ; & g_0(\xi, 0) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{g}_l e^{il\xi} \end{aligned}$$

ein solcher Ansatz. Damit wird aus (1.4) :

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \sum_{l \in \mathbb{Z}} u_l^{(0)} (e^{i\omega l} - 1) e^{il\xi} &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{f}_l e^{il\xi} + a_1 \\ \sum_{l \in \mathbb{Z}} v_l^{(0)} (e^{i\omega l} - 1) e^{il\xi} &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{g}_l e^{il\xi} \end{aligned}$$

Offensichtlich können nur Lösungen u_0, v_0 existieren, wenn der Mittelwert $[g_0(\xi, 0)] = \hat{g}_0$ verschwindet. Glücklicherweise garantiert uns dies jedoch die Schnittbedingung der Abbildung (0.3.4). Wir haben nämlich

Lemma 1.2 Gegeben ist die Abbildung (0.3.4) und U, V sind die formalen Reihen, welche die Gleichungen in (1.3) erfüllen. Dann gilt für den Mittelwert der Potenzreihe $g(\xi+U, V, \epsilon)$:

$$(1.6) \quad [g(\xi+U, V, \epsilon)] = 0 .$$

Den Beweis dieses Lemmas verschieben wir auf den Schluß dieses Abschnitts. Jetzt einmal fahren wir fort nach Lösungen der Gleichung (1.5) zu suchen. Setzen wir

$$g(\xi+U, V, \epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k(\xi) \epsilon^k ,$$

wobei die G_k nur von f_s, g_s, u_s, v_s für $s \leq k$ und f_k, g_k abhängen, so folgt nun aus (1.6)

$$(1.7) \quad [G_k] = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots) .$$

Weil jetzt noch $\hat{g}_0 = [G_0] = 0$ ist, sind wir in der Lage, die Gleichungen (1.5) zu lösen. Wir erhalten leicht

$$a_1 = -\hat{f}_0 ; \quad u_l^{(0)} = \frac{\hat{f}_l}{e^{i\omega l} - 1} ; \quad v_l^{(0)} = \frac{\hat{g}_l}{e^{i\omega l} - 1} \quad (l \neq 0) .$$

Wie wir sehen, werden die Mittelwerte $[u_0], [v_0]$ durch die Glei-

chungen (1.5) nicht festgelegt. Um jedoch das Konstruktionsverfahren für die Reihen U, V und a eindeutig zu machen, setzen wir

$$[u_0] = [v_0] = 0.$$

Induktionsannahme: Seien $a_1, \dots, a_{n-1}$ bereits bestimmt. Weiter sind die Funktionen $u_0, \dots, u_{n-2}, v_0, \dots, v_{n-2}$ bekannt und es gilt

$$[u_0] = \dots = [u_{n-2}] = [v_0] = \dots = [v_{n-2}] = 0.$$

Induktionsbehauptung: a_n läßt sich eindeutig fixieren. Zusätzlich bestimmen sich die u_{n-1}, v_{n-1} bis auf ihre Mittelwerte eindeutig.

Beweis: Zuerst definieren wir die bekannten Polynome

$$\tilde{u}(\xi, \varepsilon) := \sum_{r=0}^{n-2} u_r(\xi) \varepsilon^r; \quad \tilde{v}(\xi, \varepsilon) := \sum_{r=0}^{n-2} v_r(\xi) \varepsilon^r.$$

Dann wollen wir unter $(F(\tilde{u}, \tilde{v}))_n$ die Summe aller Koeffizienten von ε^n verstehen, wenn $F = F(x, y)$ eine beliebige Potenzreihe in den Variablen x, y darstellt.

Ein Koeffizientenvergleich in (1.3) für Glieder n -ter Ordnung in ε liefert jetzt die Gleichungen

$$(1.8) \quad \begin{aligned} u_{n-1}(\xi + \omega) - u_{n-1}(\xi) &= F_n(\xi) + a_n \\ v_{n-1}(\xi + \omega) - v_{n-1}(\xi) &= G_n(\xi) \end{aligned}$$

Dabei ist gesetzt worden

$$\begin{aligned} F_n(\xi) &= \left(\varepsilon \sum_{k=0}^{n-2} f_k(\xi + \varepsilon \tilde{u}, \varepsilon \tilde{v}) \varepsilon^k \right)_n + f_{n-1}(\xi, 0) \\ G_n(\xi) &= \left(\varepsilon \sum_{k=0}^{n-2} g_k(\xi + \varepsilon \tilde{u}, \varepsilon \tilde{v}) \varepsilon^k \right)_n + g_{n-1}(\xi, 0). \end{aligned}$$

Da die vorliegenden Reihen 2π -periodisch in ξ sind, empfehlen sich wieder die Fourierreihenansätze

$$\begin{aligned} u_{n-1}(\xi) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} u_l^{(n-1)} e^{il\xi}; \quad v_{n-1}(\xi) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} v_l^{(n-1)} e^{il\xi}; \\ F_n(\xi) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{F}_l^{(n)} e^{il\xi}, \quad G_n(\xi) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{G}_l^{(n)} e^{il\xi}. \end{aligned}$$

Wegen (1.7) gilt $[G_n] = 0$ und die 2. Gleichung von (1.8) hat dann offensichtlich die Lösung

$$v_l^{(n-1)} = \frac{\hat{G}_l^{(n)}}{e^{i\omega l} - 1} \quad (l \in \mathbb{Z}, l \neq 0)$$

und für die erste Gleichung von (1.8) erhalten wir

$$a_n = -[F_n] ; \quad v_1^{(n-1)} = \frac{\tilde{F}_e^{(n)}}{e^{i\omega} - 1} \quad (1 \in \mathbb{Z}, 1 \neq 0) .$$

Wieder bleiben die Mittelwerte $[u_{n-1}]$, $[v_{n-1}]$ unbestimmt; wir definieren deshalb

$$[u_{n-1}] = [v_{n-1}] = 0$$

und die Induktionsbehauptung ist damit abgeschlossen.

Insgesamt ist also das Lemma 1.1 vollständig bewiesen, wenn wir noch die Richtigkeit von Lemma 1.2 nachweisen. Dazu benötigen wir noch

Lemma 1.3 Gegeben ist die reell analytische Abbildung $z_1 = Az$ mit

$$x_1 = x + f(x, y) , \quad y_1 = g(x, y) .$$

f, g sind 2π -periodisch in x und die Abbildung A ist inhaltstreu. Dann ist die Abbildung

$$(1.9) \quad z_1 = Az + \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

für beliebige $a \in \mathbb{C}$ ebenfalls inhaltstreu.

Bew.: Sei A definiert auf dem Gebiet

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{C}^1 \mid |x| < r, |y| < r \}$$

und sei weiter $y = \phi(x) \cup \phi(x+2\pi)$ eine beliebige reell analytische geschlossene Kurve für die noch gilt

$$|\phi(x)| < r \quad -\infty < x < \infty .$$

Bezeichne weiter $A\Gamma$ das Bild der Kurve

$$\Gamma := \begin{pmatrix} x \\ \phi(x) \end{pmatrix}$$

unter der Abbildung A . Da nun die vorliegende Funktion 2π -periodisch in x ist, fassen wir x als Winkel auf. Das bedeutet, daß die Abbildung (1.9) die Kurve $A\Gamma$ nur um den Winkel $a \pmod{2\pi}$ dreht und die Inhaltstreue von (1.9) wird damit offensichtlich.

Dieses Lemma ermöglicht nun den

Beweis zu Lemma 1.2: Wenn $g(\xi+U, V, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\xi) \varepsilon^n$, haben wir zu zeigen - die Mittelwertbildung ist additiv -

$$[g_n] = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}_0$ minimal derart, daß $[g_n] = m \neq 0$, aber $[g_i] = 0$ für $0 \leq i < n$. Wir ersetzen jetzt g durch die Funktion $g - \varepsilon^n m$, sodaß also an die Stelle von g_n die Reihe $g_n - m$ tritt, deren Mittelwert aber Null ist. Wir definieren

$$\tilde{u}(\xi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\xi) \varepsilon^k, \quad \tilde{v}(\xi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(\xi) \varepsilon^k, \quad \tilde{a} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k \varepsilon^k,$$

sodaß diese Reihen die Gleichungen (1.3) bis zu Gliedern der Ordnung $n+1$ in ε erfüllen. Deshalb wird also die Kurve

$$x = \xi + \varepsilon \tilde{u}(\xi, \varepsilon), \quad y = \varepsilon \tilde{v}(\xi, \varepsilon)$$

abgebildet in

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \omega + \xi + \varepsilon \tilde{u}(\xi, \varepsilon) + \varepsilon f(\xi + \varepsilon \tilde{u}, \varepsilon \tilde{v}, \varepsilon) + \sum_{k=1}^{n+1} a_k \varepsilon^k &= \omega + \varepsilon \tilde{u}(\omega + \xi, \varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^{n+2}) \cdot \xi \\ \varepsilon \tilde{v}(\xi, \varepsilon) + \varepsilon g(\xi + \varepsilon \tilde{u}, \varepsilon \tilde{v}, \varepsilon) &= \varepsilon \tilde{v}(\omega + \xi, \varepsilon) + m \varepsilon^{n+1} + \mathcal{O}(\varepsilon^{n+2}) \end{aligned}$$

Unter Beachtung von Voraussetzung d) des ersten Hauptsatzes besitzt die Abbildung

$$M_n : \begin{aligned} x_1 &= \omega + x + \varepsilon f + \sum_{k=1}^{n+1} a_k \varepsilon^k \\ y_1 &= y + \varepsilon g \end{aligned}$$

wegen Lemma 1.3 die Schnittbedingung; es gibt demnach Wertepaare

ξ, ξ' , sodaß gilt

$$M_n \begin{pmatrix} \xi + \varepsilon \tilde{u}(\xi, \varepsilon) \\ \varepsilon \tilde{v}(\xi, \varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi' + \varepsilon \tilde{u}(\xi', \varepsilon) \\ \varepsilon \tilde{v}(\xi', \varepsilon) \end{pmatrix}$$

Unter Beachtung von (1.10) liefert diese Gleichung den Zusammenhang

$$\begin{aligned} \xi' + \varepsilon \tilde{u}(\xi', \varepsilon) &= \xi + \omega + \varepsilon \tilde{u}(\omega + \xi, \varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^{n+2}) \\ \varepsilon \tilde{v}(\xi', \varepsilon) &= \varepsilon \tilde{v}(\omega + \xi, \varepsilon) + \varepsilon^{n+1} m + \mathcal{O}(\varepsilon^{n+2}) \end{aligned}$$

Setzen wir noch $\xi' = \omega + \xi$, so ergibt sich aus der ersten Gleichung sofort

$$\xi' = \xi' + \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1})$$

Damit liefert aber die zweite Gleichung

$$\varepsilon \tilde{v}(\xi, \varepsilon) = \varepsilon \tilde{v}(\xi, \varepsilon) + \varepsilon^{n+1} m + O(\varepsilon^{n+2})$$

oder

$$0 = \varepsilon^{n+1} m + O(\varepsilon^{n+2}) \quad ,$$

woraus notwendig $m = 0$ folgt. Das ist jedoch ein Widerspruch zur Annahme und das Lemma ist somit bewiesen.

1.2 Aufstellung einer geeigneten Funktionalgleichung zur Lösung der Konvergenzfrage

Man könnte versuchen auf herkömmliche Weise etwa mit Hilfe der Cauchyschen Majorantenmethode die Konvergenz der in Abschnitt 1.1 konstruierten Reihen zu beweisen. Dies ist bisher noch nicht gelungen, da die Koeffizienten der nämlichen Potenzreihen von der Form

$$\frac{c_k}{e^{ik\omega} - 1} \quad (k \neq 0)$$

sind. Der Nenner ist zwar wegen (0.2.2) von Null verschieden und kann sogar wegen (0.2.2) durch

$$|e^{ik\omega} - 1| = 2 \left| \sin \frac{k\omega}{2} \right| \geq 4 c_0 |k|^{-\beta} \quad (c_0, \beta > 0)$$

abgeschätzt werden. Doch diese kleinen Nenner können durch die Majorantenmethode nicht abgefangen werden. Um ihren Einfluß zu kompensieren, erzeugt man die Kurven U, V aus (0.3.7) mit Hilfe eines Newtonschen Iterationsprozesses.

Daß dieses rasch konvergierende Verfahren in der Lage ist, die kleinen Nenner in den Griff zu bekommen, wurde mittlerweile an mehreren Beispielen demonstriert. Man vergleiche hierzu insbesondere ROBMANN [19], [20], [22], [23], MOSER [11], ARNOLD [1].

Die Newtonsche Methode ist ein unendlicher Prozeß; er besteht im wesentlichen darin, daß man durch Lösen gewisser linearisierter Gleichungen im n -ten Schritt eine im Vergleich zum $(n-1)$ -ten Schritt bessere Näherung K_n für die gesuchte Lösung K findet.

Wir werden jetzt für unser Problem eine geeignete Funktionalgleichung $\mathcal{F}$ definieren, deren Lösung die gewünschte invariante Kurve K liefert.

Bezeichne $\mathcal{A}$ die lineare Transformation (0.3.8) und sei A_∞ die Abbildung (0.3.6). Dann bedeutet die Aussage des 1. Hauptsatzes

nichts anderes, als daß die invariante Kurve K die Gleichung

$$A_m \circ K = K \circ \mathcal{R}^m \quad \text{oder} \quad A_m \circ K - K \circ \mathcal{R}^m = 0$$

erfüllt. Es ist folglich naheliegend Funktionalgleichungen vom Typ

$$(2.1) \quad f(K, A, \mathcal{R}) := A \circ K - K \circ \mathcal{R}$$

zu betrachten. Dabei sind also die Abbildungen $A, K, \mathcal{R}$ unsere Variablen und das Ziel ist jetzt, eine Nullstelle von (2.1) zu finden, die uns dann die Existenz einer invarianten Kurve sichert.

Wir formulieren nun den Newtonprozeß für die Funktionalgleichung von oben. Dazu nehmen wir an, daß bereits eine Näherung

$$K = K_m, \quad A = A_m, \quad \mathcal{R} = \mathcal{R}_m$$

für die gesuchte Nullstelle von (2.1) vorhanden ist. Im jetzt folgenden Newtonschritt hoffen wir eine neue, bessere Näherung

$$K_+ = K + \Delta K, \quad A_+ = A + \Delta A, \quad \mathcal{R}_+ = \mathcal{R} + \Delta \mathcal{R}$$

zu erhalten. Dies wird durch Linearisierung geeigneter Gleichungen zu erreichen versucht.

Offensichtlich hat man

$$(2.2) \quad \begin{aligned} f(K + \Delta K, A + \Delta A, \mathcal{R} + \Delta \mathcal{R}) &= f(K, A, \mathcal{R}) + \\ &+ f_K \cdot \Delta K + f_A \cdot \Delta A + f_{\mathcal{R}} \cdot \Delta \mathcal{R} + R \end{aligned}$$

Dabei ist das Restglied R von höherer als erster Ordnung im Hinblick auf $\Delta K, \Delta A$ und $\Delta \mathcal{R}$.

Wie man jetzt leicht berechnet, gilt

$$(2.3) \quad \begin{aligned} f_K \cdot \Delta K &= (A' \circ K) \Delta K - \Delta K \circ \mathcal{R} ; \\ f_A \cdot \Delta A &= \Delta A \circ K ; \quad f_{\mathcal{R}} \cdot \Delta \mathcal{R} = -(K' \circ \mathcal{R}) \cdot \Delta \mathcal{R} . \end{aligned}$$

Linearisierung von (2.2) bedeutet nun, daß wir die Größen $\Delta K, \Delta A, \Delta \mathcal{R}$ aus der Gleichung

$$(2.4) \quad f(K, A, \mathcal{R}) + f_K \cdot \Delta K + f_A \cdot \Delta A + f_{\mathcal{R}} \cdot \Delta \mathcal{R} = 0$$

zu bestimmen haben. Die Lösung der letzten Gleichung stößt jedoch

auf unüberwindliche Schwierigkeiten, weil der Term

$$(A' \circ K) \Delta K$$

in $f_K \Delta K$ (vgl. (2.3)) auftritt. Unser nächstes Ziel wird es deshalb sein, von $(A' \circ K) \Delta K$ noch ein Glied höherer Ordnung abzuspalten, um dies dann dem Restglied R zuzuschlagen.

Zu diesem Zweck betrachten wir anstelle einer invarianten Kurve

$K = K(f)$ eine ganze Familie von Kurven

$$(2.5) \quad \begin{aligned} x &= f + U(f, \eta), \quad U(f, \eta) = U(2\pi + f, \eta) \\ y &= \eta + V(f, \eta), \quad V(f, \eta) = V(2\pi + f, \eta) \end{aligned}$$

welche noch von einem komplexen Parameter η abhängen. Weiter wollen wir Ω ebenfalls von η abhängig machen; wir setzen

$$(2.6) \quad \Omega = \Omega(f, \eta) = \left(\omega + \frac{s}{\eta} + b\eta \right)$$

Dabei ist b ein Wert, der durch die vorangegangenen m Newtonschritte eindeutig festgelegt wurde und deshalb als bekannt vorausgesetzt werden darf.

Bezeichne jetzt $f = \begin{pmatrix} f \\ \eta \end{pmatrix}$, so ist es wegen (2.5), (2.6) möglich $\frac{\partial f}{\partial s}$ zu bilden. Wir erhalten

$$f_{(K, A, \Omega)}' := \frac{\partial f}{\partial s}(K, A, \Omega) = (A' \circ K) \cdot K' - (K' \circ \Omega) \Omega'$$

Als nächstes definieren wir den unbekannten Vektor $\Delta^* K$ durch

$$(2.7) \quad \Delta K = K' \Delta^* K$$

Wir multiplizieren $f_{(K, A, \Omega)}'$ mit $\Delta^* K$ und bekommen:

$$\begin{aligned} f_{(K, A, \Omega)}' \Delta^* K &= (A' \circ K) \cdot K' \Delta^* K - (K' \circ \Omega) \Omega' \Delta^* K = \\ &= (A' \circ K) \Delta K - (K' \circ \Omega) \Omega' \Delta^* K \end{aligned}$$

(2,7)

Damit ergibt sich

$$(A' \circ K) \Delta K = f_{(K, A, \Omega)}' \Delta^* K + (K' \circ \Omega) \Omega' \Delta^* K$$

Setzen wir weiter $f'(K, A, \alpha) := f_A \Delta A + f_K \Delta K + f_\alpha \Delta \alpha$,
so folgt wegen (2.3) die Gleichung

$$\begin{aligned} (A' \cdot K) \Delta K &= f'(K, A, \alpha) + \Delta K \cdot \alpha - \Delta A \cdot K + (K' \cdot \alpha) \Delta \alpha = \\ &= f(K + \Delta K, A + \Delta A, \alpha + \Delta \alpha) - f(K, A, \alpha) - R + \Delta K \cdot \alpha - \Delta A \cdot K + \\ &\quad + (K' \cdot \alpha) \Delta \alpha. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Wir haben jetzt zwei Gleichungen für $(A' \cdot K) \Delta K$; sie liefern den Zusammenhang:

$$(2.8) \quad f(K + \Delta K, A + \Delta A, \alpha + \Delta \alpha) = f(K, A, \alpha) + (K' \cdot \alpha) [\alpha' \Delta^2 K - \Delta^2 K \cdot \alpha - \Delta \alpha] + \Delta A \cdot K + f(K, A, \alpha)' \Delta^2 K + R.$$

Dabei haben wir noch beachtet, daß

$$\Delta K \cdot \alpha = (K' \Delta^2 K) \cdot \alpha = (K' \cdot \alpha) (\Delta^2 K \cdot \alpha). \quad (2.7)$$

Es wäre gut, könnten wir das vorletzte Glied von (2.8) dem Rest zuschlagen. Dazu müssen wir zeigen, daß der Term $f(K, A, \alpha)' \Delta^2 K$ von mindestens 2. Ordnung in $\mathfrak{J}$ ist. Das ist aber klar: Nach (2.7) ist $\Delta^2 K$ von gleicher Größenordnung wie ΔK , denn die Matrix K besitzt nach (2.5) absolute Glieder. Da obendrein $f(K, A, \alpha)'(\mathfrak{J})$ von mindestens nullter Ordnung in $\mathfrak{J}$ ist, gilt schließlich, daß der betrachtete Ausdruck von höherer als erster Ordnung in $\mathfrak{J}$ ist.

Deshalb heißt Linearisierung von (2.8) jetzt, daß die Gleichung

$$(2.9) \quad f(K, A, \alpha) + (K' \cdot \alpha) [\alpha' \Delta^2 K - \Delta^2 K \cdot \alpha - \Delta \alpha] + \Delta A \cdot \alpha = 0$$

zu lösen ist. Wir formen diese Gleichung noch geeignet um.

Wie noch später zu verifizieren sein wird, sind $|U|$, $|V|$ (siehe (2.5)) genügend klein, daß also die Jakobimatrix K' dicht bei der Einheitsmatrix liegt; folglich können wir die Inverse $(K' \cdot \alpha)^{-1}$ bilden. Da weiter η ein beliebig kleiner Parameter darstellen soll, ist es dann auch möglich die bekannte Funktion

$$(K' \cdot \alpha)^{-1} f(K, A, \alpha)(\mathfrak{J})$$

in eine Potenzreihe nach η zu entwickeln. Sei etwa

$$(2.10) \quad (K' \cdot \Omega)^{-1} f(K, A, \Omega)(\eta) = \tilde{F}(\xi) + \bar{F}(\xi)\eta + O(\eta^2)$$

eine solche Reihenentwicklung; dabei wurde noch gesetzt

$$\tilde{F}(\xi) = \begin{pmatrix} \tilde{F}_1(\xi) \\ \tilde{F}_2(\xi) \end{pmatrix}, \quad \bar{F}(\xi) = \begin{pmatrix} \bar{F}_1(\xi) \\ \bar{F}_2(\xi) \end{pmatrix}.$$

Anstelle von (2.9) betrachten wir jetzt die einfacher zu behandelnde Gleichung

$$(2.11) \quad \Delta^* K \cdot \Omega - \Omega' \Delta^* K + \Delta \Omega = \tilde{F}(\xi) + \bar{F}(\xi) \cdot \eta + (K' \cdot \Omega)^{-1} (\Delta A \cdot \Omega).$$

Für die unbekannten Funktionen $\Delta^* K$, ΔA und $\Delta \Omega$ bemühen wir uns nun um geeignete Ansätze.

$\Delta^* K$ setzen wir an in der Form

$$(2.12) \quad \Delta^* K = \begin{pmatrix} u(\xi) + w(\xi) \cdot \eta \\ v(\xi) + z(\xi) \cdot \eta \end{pmatrix}$$

Dabei seien u, v, w, z 2π -periodische Funktionen in ξ .

Der Ansatz in (2.12) ist sinnvoll, wenn man folgendes bedenkt:

Für die Funktionen U, V in (2.5) verlangen wir, daß sie linear in η sind. Diese Forderung zieht nach sich, daß jede Änderung ΔK von K ebenfalls linear in η sein muß. Deshalb ist es nun auch wegen (2.7) notwendig, $\Delta^* K$ in der obigen Gestalt anzusetzen.

Der Ansatz

$$(2.13) \quad \Delta A = \begin{pmatrix} \Delta a \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\Delta a \in \mathbb{C})$$

ergibt sich ganz natürlich aus der Tatsache, daß wir ausgehend von einer Abbildung der Form

$$x_1 = u + x + f(x, y), \quad y_1 = y + g(x, y)$$

eine invariante Kurve einer Abbildung der Gestalt (1.1) suchen.

Schließlich liegt wegen (2.6) der Ansatz

$$(2.14) \quad \Delta \Omega = \begin{pmatrix} \Delta b \cdot \eta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\Delta b \in \mathbb{C})$$

nahe.

1.3 Lösung der linearisierten Gleichungen

Im folgenden werden die Normen verwendet

$$|x| := \sum_{j=1}^n x_j \quad \text{für} \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n.$$

Für

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

setzen wir

$$\|B\| := \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{jk}|.$$

Außerdem verstehen wir unter E bzw. E_n die n -te Einheitsmatrix.

Die Ausführungen der nächsten Abschnitte machen es notwendig, einige aus der Analysis und der Funktionentheorie bekannte Sätze zu verwenden. Diese sollen hier der Vollständigkeit halber ohne Beweis zusammengestellt werden. Die Beweise der aufgeführten Sätze sind beispielsweise in den jeweils in Klammern angegebenen Werken zu finden.

Satz 3.1

a) Sei F eine in dem Streifen

$$S_n(r) := \{x \in \mathbb{C}^n \mid |\operatorname{Im} x| < r\}$$

reell analytische Funktion von $\mathbb{C}^n$ in den $\mathbb{C}^m$ und sei F

2π -periodisch in x . Dann gilt für den Mittelwert F :

$$[F] \in \mathbb{R}^m.$$

b) Genügt F der Abschätzung $|F(x)| < M$ für $x \in S_n(r)$,

so gilt für den Mittelwert die Abschätzung

$$|[F]| < M.$$

Bew.: [21], Lemma 18.4

Satz 3.2

Ist $Q \in \mathbb{C}^{m \times m}$ mit $\|Q^{-1}\| \leq c$. Sei weiter $F: D \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$,
 $D \subset \mathbb{C}^k$ offen eine holomorphe Abbildung in D mit der Abschätzung

$$\|F(x) - Q\| \leq \frac{1}{2c}, \quad x \in D.$$

Dann existiert für jedes $x \in D$ die Abbildung $F(x)^{-1}$, welche holomorph ist und die Abschätzung besitzt

$$\|F(x)^{-1}\| \leq 2c, \quad x \in D.$$

Bew.: [21], §18

Satz 3.3 (Cauchy'sche Abschätzungsformel)

Vor.: $\emptyset \neq D \subset \mathbb{C}^k$ offen, $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}^n$ offen; f ist eine in $D \times G$ holomorphe Abbildung mit Werten in einem komplexen Banachraum $(E, \|\cdot\|)$, die der Abschätzung

$$\|f(x, y)\| \leq M \quad \forall x \in D, y \in G$$

genügt. Sei $\delta > 0$ hinreichend klein, sodaß

$$D - \delta := \{x \in D \mid \{x' \in \mathbb{C}^k \mid |x' - x| < \delta\} \subset D\} \neq \emptyset.$$

ist; dann gilt die Cauchy'sche Abschätzungsformel

$$\left| \frac{\partial^{j_1 + \dots + j_k} f}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_k^{j_k}}(x, y) \right| \leq j_1! \dots j_k! M / \delta^{j_1 + \dots + j_k}$$

$$\text{für alle } x \in D - \delta, y \in G, j = \begin{pmatrix} j_1 \\ \vdots \\ j_k \end{pmatrix} \in \mathbb{N}_0^k.$$

Bew.: [5], 20.7

Satz 3.4

Gegeben ist die Funktion $F(\xi, \eta)$, welche holomorph ist in

$$D = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{C}^2 \mid |\operatorname{Im} \xi| < r, |\eta| < r_1\} \quad \text{und } 2\pi\text{-periodisch}$$

in ξ ist. Es gilt noch die Abschätzung $|F(\xi, \eta)| \leq M$ f.a. $(\xi, \eta) \in D$

Beh.: F besitzt die Reihenentwicklung

$$F(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(\xi) \eta^k$$

mit holomorphen Funktionen F_k ($k=0, 1, \dots$) und es gilt

$$|F_k(\xi)| \leq M / r_1^k \quad (k = 0, 1, \dots; |\operatorname{Im} \xi| < r)$$

Bew.: [21], § 14

Mit den Ansätzen (2.12) - (2.14) soll nun versucht werden, eine analytische Lösung $\Delta K, \Delta A, \Delta \mathcal{R}$ von (2.11) zu finden. Erste Überlegungen lassen es zweckmäßig erscheinen, anstelle (2.11) eine leicht abgeänderte Gleichung zu betrachten.

Zunächst beachten wir, daß wegen (2.13) gilt: $\Delta A \circ \mathcal{R} = \Delta A$. Weiter ersetzen wir in (2.11) das erste $\mathcal{R}$ (vgl. (2.6)) durch

$$\mathcal{R}^* = \begin{pmatrix} \omega + \xi \\ \eta \end{pmatrix};$$

damit lautet (2.11) ausführlich mit den Ansätzen (2.12)-(2.14) geschrieben

$$\begin{aligned} (3.1) \quad & u(\omega + \xi) - u(\xi) - b v(\xi) + [w(\omega + \xi) - w(\xi) - b z(\xi) + \Delta b] \cdot \eta = \\ & = \tilde{F}_1(\xi) + \bar{F}_1(\xi) \eta + A_1(\xi, \eta) \Delta a \\ & v(\omega + \xi) - v(\xi) + [z(\omega + \xi) - z(\xi)] \cdot \eta = \\ & = \tilde{F}_2(\xi) + \bar{F}_2(\xi) \eta + A_2(\xi, \eta) \Delta a \end{aligned}$$

Dabei ist gesetzt worden

$$(3.2) \quad (K' \circ \mathcal{R})^{-1} \Delta A := \begin{pmatrix} A_1(\xi, \eta) \Delta a \\ A_2(\xi, \eta) \Delta a \end{pmatrix}.$$

Es handelt sich bei (3.1) um ein System von Differenzengleichungen, zu deren Lösung der folgende Satz von ROßMANN [20] von elementarer Bedeutung ist.

Satz 3.5

Vor.: h ist eine reell analytische Funktion in $\{|\operatorname{Im} x| < r\}$ mit der Periode 2π und der Abschätzung

$$|h(x)| < M \quad \text{für } |\operatorname{Im} x| < r.$$

Die Zahl ω erfüllt die Ungleichungen in (0.2.2).

Beh.: Die Differenzengleichung

$$u(\omega + \xi) - u(\xi) = h - [h]$$

hat in $\{|\operatorname{Im} x| < r\}$ eine reell analytische Lösung u mit der Periode 2π , dem Mittelwert $[u] = 0$ und der Abschätzung

$$|u(x)| < C c_0^{-1} M \delta^{-\beta} \quad (|\operatorname{Im} x| < r - \delta; 0 < \delta < r),$$

wobei C eine nur von β abhängige positive Konstante ist.

Bew.: [20], S. 80 - 85

Ober die in (3.1) auftretenden Funktionen machen wir die folgenden Voraussetzungen :

V1: $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \bar{F}_1, \bar{F}_2$ sind reell analytische Funktionen in $|Im\ x| < r$ mit der Periode 2π .

V2: Es gelten die Abschätzungen

$$(3.3) \quad |\tilde{F}(\xi)| < M_1; |\bar{F}(\xi)| < M_2 \quad \text{für} \quad |Im\ \xi| < r-s^*, \quad 0 < s^* < r.$$

V3: Es gilt die Abschätzung

$$(3.4) \quad \| (K' \circ \mathcal{A}) - E_2 \| < \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad |Im\ x| < r-s^*, \quad |\eta| < s-s^*, \quad 0 < s^* < r, \quad 4s^* \geq s.$$

V4: Der Wert b erfüllt die Ungleichung

$$(3.5) \quad |b| < 1.$$

V5: Die Funktionen $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$ aus (3.2) sind reell analytisch für $|Im\ \xi| < r-s^*$; $|\eta| < s-s^*$ mit $4s^* \geq s$.

Da alle auftretenden Funktionen in (3.1) 2π -periodisch in ξ sind, wollen wir sie bei den Rechnungen in ihrer Fourierreihendarstellung verwenden. Sei also:

$$u(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k e^{ik\xi}, \quad v(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{v}_k e^{ik\xi}, \quad \tilde{F}_1(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{F}_k^{(1)} e^{ik\xi}$$

(I) Zuerst konstruieren wir Δa und schätzen diese Größe nach oben ab. Die erste Gleichung von (3.1) liefert für $\eta = 0$:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k (e^{i\omega\xi} - 1) e^{ik\xi} + b \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{v}_k e^{ik\xi} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{F}_k^{(1)} e^{ik\xi} + A_1(\xi, 0) \Delta a.$$

Wie wir später bei der Bestimmung von v sehen werden, gilt $[v] = 0$

Damit ergibt sich aus der letzten Gleichung für $k = 0$ die Lösung

$$0 = [\tilde{F}_1] + [A_1(\xi, 0)] \Delta a$$

oder

$$(3.6) \quad \Delta a = - [\tilde{F}_1] / [A_1(\xi, 0)].$$

Wir müssen noch sicher stellen, daß $[A_1(\xi, 0)] \neq 0$ für $|Im\ \xi| < r-s^*$.

Wie man leicht nachrechnet ist wegen (3.2) und (2.5)

$$A_1(\xi, \eta) = (1 + V_2 \circ \mathcal{A}) / (\det(K' \circ \mathcal{A})).$$

Aus (3.4) folgt ebenfalls ohne weiteres

$$|1 + v_2 \cdot \Omega| > \frac{1}{2} ; \|K' \cdot \Omega\| \leq \frac{3}{2} \text{ für } |\operatorname{Im} \xi| < r-s^*, |\eta| < s-s^*,$$

woraus wir zunächst einmal schließen

$$|1/\det(K' \cdot \Omega)| > \frac{1}{5} \text{ für } |\operatorname{Im} \xi| < r-s^*, |\eta| < s-s^* .$$

Weiter gilt wegen der Additivität des Mittelwerts

$$\begin{aligned} [Id + v_2 \cdot \Omega] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (v_2 \cdot \Omega) d\xi = 1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_2 \cdot \Omega d\xi \\ &\geq 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |v_2 \cdot \Omega| d\xi \geq 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\xi = \frac{1}{2} . \end{aligned} \quad (3.4)$$

Zusammengefaßt erhalten wir also

$$|A_1(\xi, 0)| \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = 1/10 \neq 0 \text{ für } |\operatorname{Im} \xi| < r-s^*$$

und da noch wegen Satz 3.1 b) aus $|\tilde{F}_1| < M_1$ folgt $|[\tilde{F}_1]| < M_1$;
ergibt sich nun unter Beachtung von (3.3) wegen (3.6) insgesamt

$$(3.7) \quad |Aa| < 10 M_1 .$$

(II) Wir gehen jetzt an die Bestimmung von v . Die zweite Gleichung in (3.1) liefert für $\eta = 0$:

$$v(\omega + \xi) - v(\xi) = \tilde{G}_2(\xi)$$

mit

$$(3.8) \quad \tilde{G}_2(\xi) := \tilde{F}_2(\xi) + A_2(\xi, 0) \Delta a$$

und G_2 ist aufgrund der Voraussetzungen V1, V5 reell analytisch in dem Gebiet $|\operatorname{Im} \xi| < r-s^*$. Wegen oben wissen wir, daß für $|\eta| < s-s^*$, $|\operatorname{Im} \xi| < r-s^*$ die Abschätzung $\|K' \cdot \Omega\| < 3/2$ gilt. Damit haben wir unter Beachtung von (3.4) wegen Satz 3.2 die Relation

$$(3.9) \quad \|(K' \cdot \Omega)^{-1}\| < 2 \text{ für } |\operatorname{Im} \xi| < r-s^*, |\eta| < s-s^* .$$

Also erhalten wir unter Verwendung von (3.2) wegen (3.7) für

$|\operatorname{Im} \xi| < r-s^*$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} (3.10) \quad |A_2(\xi, 0) \Delta a| &\leq \|(K' \cdot \Omega)^{-1}\| |Aa| \leq \|(K' \cdot \Omega)^{-1}\| |\Delta a| \\ &< 2 |\Delta a| < 20 M_1 . \end{aligned}$$

Wegen (3.3) hat nun $\tilde{G}_2$ die obere Schranke

$$|\tilde{G}_2(\xi)| < 21 M_1 \text{ für } |\operatorname{Im} \xi| < r-s^*$$

und der Satz 3.5 liefert demzufolge

Lemma 3.1 Die Gleichungen

$$v(\omega + \xi) - v(\xi) = \tilde{G}_2(\xi) - [\tilde{G}_2]$$

besitzen in $|\operatorname{Im} \xi| < r-s^*$ eine reell analytische Lösung v mit der Periode 2π und dem Mittelwert $[v] = 0$. Es gilt weiterhin die Abschätzung

$$(3.11) \quad |v(\xi)| \leq C_3 M_1 \delta^{-\rho} \quad \text{für} \quad \begin{array}{l} |\operatorname{Im} \xi| < (r-s^*) - \delta \\ 0 < s+\delta < r \end{array}.$$

Dabei wurde gesetzt: $C_3 = 21 C c_0^{-1}$.

(III) Als nächstes wollen wir die Reihe z fixieren. Dazu leiten wir die zweite Gleichung in (3.1) partiell nach η ab und erhalten danach für $\eta = 0$:

$$z(\omega + \xi) - z(\xi) = \bar{G}_2(\xi)$$

mit

$$(3.12) \quad \bar{G}_2(\xi) := \bar{F}_2(\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} A_2(\xi, \eta) \Big|_{\eta=0} \Delta a.$$

Wieder sehen wir sofort, daß $\bar{G}_2$ reell analytisch ist für $|\operatorname{Im} \xi| < r-s^*$.

Wegen (3.10) haben wir weiter

$$\left| \frac{\partial A_2}{\partial \eta}(\xi, \eta) \Delta a \right| \leq 20 M_1 / s^* \quad \text{für} \quad |\operatorname{Im} \xi| < r-s^*, |\eta| < s-2s^*$$

und damit gilt also die Abschätzung

$$|\bar{G}_2(\xi)| \leq M_2 + 20 M_1 / s^* \quad \text{für} \quad \begin{array}{l} |\operatorname{Im} \xi| < r-s^* \\ |\eta| < s-2s^* \end{array}$$

und Satz 3.5 liefert wieder

Lemma 3.2 Die Gleichung

$$z(\omega + \xi) - z(\xi) = \bar{G}_2(\xi) - [\bar{G}_2]$$

besitzt in $|\operatorname{Im} \xi| < r-s^*$ eine reell analytische, 2π -periodische Lösung z mit $[z] = 0$ und es gilt

$$(3.13) \quad |z(\xi)| \leq C_4 (M_1 / s^* + M_2) \delta^{-\rho} \quad \text{für} \quad \begin{array}{l} |\operatorname{Im} \xi| < (r-s^*) - \delta \\ 0 < \delta < r \end{array}$$

mit $C_4 = 20 C c_0^{-1}$.

(IV) Wir fahren fort und bestimmen u . Zunächst ergibt wieder die erste Gleichung von (3.1) für $\eta = 0$:

$$(3.14) \quad u(\omega + \xi) - u(\xi) = b v(\xi) + \tilde{F}_1(\xi) + A_1(\xi, 0) \Delta a.$$

Die rechte Seite

$$\tilde{G}_1(\xi) := b v(\xi) + \tilde{F}_1(\xi) + A_1(\xi, 0) \Delta a$$

dieser Gleichung ist aus den vorangegangenen Rechnungen bekannt und sie ist auch reell analytisch in $|\operatorname{Im} \xi| < (r-s^*) - \delta$.

Da $[v] = 0$ war und Δa so festgelegt war, daß ist

$$[\tilde{F}_1(\xi)] + [A_1(\xi, 0)] \Delta a = 0,$$

gilt also für den Mittelwert von $\tilde{G}_1$: $[\tilde{G}_1] = 0$.

Wir sind deshalb nun in der Lage (3.14) sofort zu lösen. Unter Verwendung von (3.3), (3.4), (3.10) und (3.11) haben wir:

$$\begin{aligned} |\tilde{G}_1| &< |b v| + |\tilde{F}_1| + |A_1(\xi, 0) \Delta a| \\ &< M_1 \delta^{-A} (C_3 + 21 \delta^A) < M_1 C_5 \delta^{-A} \quad \text{mit } C_5 := C_3 + 21 \end{aligned}$$

Die Konstante C_5 kann auf diese Weise gewählt werden, da wie wir später sehen werden, gilt: $|\delta^A| < 1$.

Mit der letzten Abschätzung für $\tilde{G}_1$ bekommen wir deshalb

Lemma 3.3 Die Gleichung (3.14) besitzt eine reell analytische Lösung u mit der Periode 2π und dem Mittelwert Null. Es gilt die Abschätzung

$$(3.15) \quad |u(\xi)| < C_6 M_1 \delta^{-2A} \quad \text{für} \quad \begin{aligned} |\operatorname{Im} \xi| &< (r-s^*) - 2\delta \\ 0 &< 2\delta < r-s^* \end{aligned}.$$

Die Konstante C_6 ist gewählt in der Form: $C_6 = C C_0^{-1} C_5$.

(V) Endlich müssen wir noch w und Δb berechnen. Partielle Ableitung der ersten Gleichung in (3.1) zeigt, daß wir w und Δb aus

$$(3.16) \quad w(\omega + \xi) - w(\xi) = b z(\xi) + \tilde{F}_1(\xi) - \Delta b + \frac{\partial A_1}{\partial \eta}(\xi, \eta) \Big|_{\eta=0} \cdot \Delta a$$

zu bestimmen haben.

Da $[z] = 0$ ist, sehen wir sofort, daß Δb die Gleichung

$$\Delta b = [\bar{F}_1(\xi)] + \left[\frac{\partial A_1}{\partial \xi}(\xi, \eta) \right]_{\eta=0} \Delta a$$

erfüllt. Wir behaupten, Δb läßt sich abschätzen durch

$$(3.17) \quad |\Delta b| < M_2 + 20 M_1/s^* \quad (|\operatorname{Im} \xi| < r-s^*, |\eta| < s-2s^*) .$$

Zunächst liefert wegen $|\bar{F}_1(\xi)| < M_2$ für $|\operatorname{Im} \xi| < r-s^*$ der Satz 3.1 die Bedingung $|\bar{F}_1(\xi)| < M_2$ für $|\operatorname{Im} \xi| < r-s^*$. Da außerdem noch die Ungleichung (3.10) richtig ist für $|\operatorname{Im} \xi| < r-s^*, |\eta| < s-s^*$, erhalten wir mit der Cauchy'schen Abschätzung

$$(3.18) \quad \left| \frac{\partial A_1}{\partial \xi}(\xi, \eta) \right|_{\eta=0} < 20 M_1/s^* \quad \text{für } |\operatorname{Im} \xi| < r-s^*, |\eta| < s-2s^* .$$

Damit wird insgesamt (3.17) einsichtig.

Unter Berücksichtigung von (3.3), (3.5), (3.7), (3.13), (3.17), (3.18) läßt sich nun die rechte Seite von (3.6) abschätzen zu

$$|bz(\xi) + \bar{F}_1(\xi) - \Delta b + \frac{\partial A_1}{\partial \xi}(\xi, \eta) \Big|_{\eta=0} \Delta a| < C_7(M_1/s^* + M_2)$$

und C_7 ist eine geeignete positive Konstante. Die letzte Ungleichung ist wegen (3.13), (3.18) richtig für $|\operatorname{Im} \xi| < (r-s^*) - \delta$, $|\eta| < s-2s^*$. Der Satz 3.5 liefert jetzt

Lemma 3.4 Die Gleichung (3.16) besitzt eine reell analytische,

2π -periodische Lösung w mit dem Mittelwert Null und der Abschätzung

$$(3.19) \quad |w(\xi)| < C_8(M_1/s^* + M_2) \delta^{-2} \quad \text{für } |\operatorname{Im} \xi| < (r-s^*) - 2\delta .$$

Dabei wurde noch gesetzt: $C_8 = C_7 C_0^{-1}$

Die bisherigen Ergebnisse lassen sich in dem folgenden Satz zusammenfassen:

Satz 3.6

Vor.: a) Es gelten die Voraussetzungen V1 - V5 von Seite 51 .

b) ω erfüllt die Ungleichungen in (0.2.2) .

Beh.: Das System

$$(3.20) \quad \Delta^* K \cdot \Delta^* R - \Delta^* K + \Delta^* R = \tilde{F}(\xi) + \bar{F}(\xi) \cdot \eta + (K' \cdot \Delta^* R)^{-1} \Delta A + \\ + \left([\tilde{G}_2(\xi)] \begin{matrix} 0 \\ [\bar{G}_2(\xi)] \cdot \eta \end{matrix} \right)$$

mit den in (3.8) bzw. (3.12) reell analytischen Funktionen

$\tilde{G}_1, \bar{G}_2$ besitzt analytische Lösungen $\Delta^* K, \Delta A, \Delta R$ für die gilt:

(i) Die in ξ 2π -periodische Kurven Schar

$$\Delta^* K = \begin{pmatrix} U(\xi, \eta) \\ V(\xi, \eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(\xi) + w(\xi) \eta \\ v(\xi) + z(\xi) \eta \end{pmatrix}$$

ist reell analytisch in $|\operatorname{Im} \xi| < (r-s^*)-2\delta, |\eta| < s-2s^*$, wobei noch ist: $0 < s^* + 2\delta < r$.

(ii) In dem in (i) angegebenen Gebiet gilt die Abschätzung

$$(3.21) \quad |U(\xi, \eta)| + |V(\xi, \eta)| < C^* (M_2 s + M_1) \delta^{-2/\beta}$$

und C^* ist eine nur von β abhängige Konstante.

(iii) Für die Mittelwerte von U, V haben wir

$$(3.22) \quad [U] = [V] = 0$$

(iv) Die Vektoren $\Delta A = \begin{pmatrix} a^a \\ 0 \end{pmatrix}, \Delta R = \begin{pmatrix} a^b \cdot \eta \\ 0 \end{pmatrix}$

genügen den Abschätzungen

$$(3.7) \quad |\Delta A| < 10 M_1$$

$$(3.17) \quad |\Delta R| < M_2 + 20 M_1 / s^*$$

Bew.: Wegen der Lemmata 3.1 - 3.4 braucht nur noch die Ungleichung in (3.21) gezeigt zu werden.

Wegen (3.4) gilt $4s^* \geq s$; ist jetzt $|\eta| < s$, so erhalten wir aus (3.15), (3.19) für $|\operatorname{Im} \xi| < (r-s^*)-2\delta$:

$$|u(\xi)| + |w(\xi) \cdot \eta| < C_6 M_1 \delta^{-2\beta} + 4 C_8 (M_1 + M_2 s) \delta^{-2\beta} < \\ < C^* (M_1 + M_2 s) \delta^{-2\beta} \quad \text{mit } C^* = 4C_8 + C_6.$$

Da die Summe $|v(\xi)| + |z(\xi) \cdot \eta|$ wegen (3.11), (3.13) ebenfalls die Schranke $C^* (M_1 + M_2 s) \delta^{-2\beta}$ nicht überschreitet, gilt demnach die Ungleichung (3.20).

Da $C_1, \dots, C_8$ definitionsgemäß positive Konstanten sind, welche nur von β abhängen, trifft dies auch zu für $C^* = 4C_8 + C_6$ und wir sind mit dem Beweis des Satzes fertig.



Multiplizieren wir die ganze Gleichung (3.20) mit $(K' \circ \mathcal{R})$, so erhalten wir wegen (2.10) die Gleichung

$$\begin{aligned} f(K, A, \mathcal{R})(\eta) &= (K' \circ \mathcal{R}) [\Delta^* K \circ \mathcal{R}^* - \mathcal{R} \circ \Delta^* K + \Delta \mathcal{R}] - \Delta A + (K' \circ \mathcal{R}) \sigma(\eta^2) \\ &\quad - (K' \circ \mathcal{R}) \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ [\tilde{G}_2] + [\bar{G}_2] \eta \end{smallmatrix} \right). \end{aligned}$$

Dies in (2.8) eingesetzt liefert unter Berücksichtigung von

$\Delta A = \Delta A \circ K$ den Zusammenhang

$$\begin{aligned} f(K + \Delta K, A + \Delta A, \mathcal{R} + \Delta \mathcal{R}) &= (K' \circ \mathcal{R}) [\Delta^* K \circ \mathcal{R}^* - \Delta^* K \circ \mathcal{R}] + \\ (3.23) \quad &f(K, A, \mathcal{R})' \Delta^* K + (K' \circ \mathcal{R}) \sigma(\eta^2) + R - (K' \circ \mathcal{R}) \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ [\tilde{G}_2] + [\bar{G}_2] \eta \end{smallmatrix} \right) \end{aligned}$$

Soll nun $K + \Delta K, A + \Delta A, \mathcal{R} + \Delta \mathcal{R}$ eine bessere Näherung für die gesuchte Lösung der Funktionalgleichung (2.1) sein als $K, A, \mathcal{R}$, so muß die rechte Seite von (3.23) von höherer Ordnung sein.

Offensichtlich ist dies auch der Fall für den 2., 3. und 4. Term dieser Gleichung. Auch der erste Term ist von höherer Ordnung, wenn nur - wie später gezeigt werden wird - $\mathcal{R}^*$ und $\mathcal{R}$ dicht genug beisammen liegen.

Auf den ersten Blick erscheint jedoch der letzte Term von (3.23) nur von linearer Ordnung zu sein. Es wird sich aber erweisen, daß die Schnittbedingung von A diesen Ausdruck von höherer Ordnung in $\Delta A, \Delta K, \Delta \mathcal{R}$ macht.

1.4 Der Induktionsanfang der Newton - Iteration und Formulierung der Induktionsbehauptung

Unser erklärtes Ziel ist es mit Hilfe des Newtonschen Iterationsprozesses eine gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen

$$K_n, A_n, \mathcal{R}_n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

zu konstruieren, sodaß für die Grenzfunktionen

$$K_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} K_n; \quad A_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n; \quad \mathcal{R}_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}_n$$

gilt

$$(4.1) \quad A \circ K_\infty = K_\infty \circ \mathcal{R}_\infty.$$

Im Hinblick auf den ersten Hauptsatz müssen wir noch zusätzlich verlangen, daß die Abbildung A_∞ die Gestalt (0.3.6) besitzt und daß $\mathcal{R}_\infty$ eine lineare Transformation darstellt. Können wir dies erreichen, so folgt aus (4.1), daß K_∞ eine invariante Kurve von A_∞ ist und der Hauptsatz ist bewiesen.

Unser erstes Problem wird zunächst einmal sein, geeignete Startfunktionen $K_0, A_0, \mathcal{R}_0$ zu finden. Im weiteren wird es dann wesentlich sein die Größenverhältnisse von

$$|A_{n+1} - A_n|, \quad |K_{n+1} - K_n|, \quad |\mathcal{R}_{n+1} - \mathcal{R}_n|$$

so geschickt zu wählen, sodaß die Größe des $(n+1)$ -ten Fehlers

$$|A_\infty - A_{n+1}| + |K_\infty - K_{n+1}| + |\mathcal{R}_\infty - \mathcal{R}_{n+1}|$$

für wachsendes n gegen Null strebt.

Zur Abkürzung definieren wir:

Definition 4.1

Seien δ, s positive Konstanten. Dann bezeichne $D(\delta, s)$ das folgende konvexe Gebiet in $\mathbb{C}^2$:

$$D(\delta, s) := \left\{ \zeta = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mid |\operatorname{Im} \xi| < r_0/2 + \delta, |\eta| < s \right\}.$$

Weiter sei $P(\delta, s)$ die Menge aller in $D(\delta, s)$ reell analytischen Funktionen mit der Periode 2π in ξ .

Was nun die einzelnen Newtonschritte leisten, wird demonstriert in

Satz 4.1

Vor.: Gegeben sind die Voraussetzungen des ersten Hauptsatzes.

Beh.: Es existieren geeignete Startfunktionen $K_0, A_0, \mathcal{R}_0$ und passende Zahlen M_0, δ_0, s_0 , sodaß der im 2. Abschnitt formulierte Newtonprozeß Funktionen $K_n, A_n, \mathcal{R}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) mit den folgenden Eigenschaften liefert:

(i) $f(K_n, A_n, \mathcal{R}_n) \in P(12\delta_n, 4s_n)$ und es gilt

$$(4.2)_n \quad |f(K_n, A_n, \mathcal{R}_n)| < M_n \quad f \in D(12\delta_n, 4s_n).$$

(ii) $K_n \in P(12\delta_n, 4s_n)$ und wir haben die Abschätzungen

$$(4.3)_n \quad |K_n - f| < \delta_0 - \delta_n$$

$$(4.4)_n \quad \|K'_n - E\| < \frac{1}{2} - \delta_n^2 \quad \left. \vphantom{\|K'_n - E\|} \right\} \text{ für } f \in D(12\delta_n, 4s_n).$$

(iii) Gelte (vgl. hierzu (2.13), (2.14))

$$(4.5) \quad A_{n+1} := A_n + \binom{a_{n+1}}{0}, \mathcal{R}_{n+1} := \mathcal{R}_n + \binom{b_{n+1}}{0},$$

so erfüllen die Werte $\Delta a_{n+1}, \Delta b_{n+1}$ die Ungleichungen

$$(4.6)_n \quad |\Delta a_{n+1}| < 20 M_n$$

$$(4.7)_n \quad |\Delta b_{n+1}| < 41 M_n / s_n.$$

Bem.: δ_n, s_n bezeichnen hier geeignete - im folgenden noch näher zu spezifizierende - Konstanten.

Bew.: Zuallererst müssen wir uns eine geeignete Anfangsnäherung

$K_0, A_0, \mathcal{R}_0$ beschaffen. Wir prüfen nach, ob

$$(4.8) \quad K_0 = f, \quad A_0 = A, \quad \mathcal{R}_0 = \begin{pmatrix} \omega + f \\ \gamma \end{pmatrix}$$

die geforderten Eigenschaften (i) - (iii) hat, wenn $A_0 = A$ die Ausgangsabbildung in (0.3.4) darstellt.

Wegen (2.1) haben wir zunächst

$$f(K_0, A_0, \mathcal{R}_0) = A_0 \circ K_0 - K_0 \circ \mathcal{R}_0 = \begin{pmatrix} f(f, \gamma) \\ g(f, \gamma) \end{pmatrix}.$$

Aus den Voraussetzungen (0.3.4), (0.3.5) über die Funktionen f, g können wir sofort folgern

$$|f(k_0, A_0, \mathfrak{A}_0)| < M_0.$$

Außerdem ist $f(k_0, A_0, \mathfrak{A}_0) \in P(12\delta_0, 4s_0)$, wenn nur gilt

$$(4.9) \quad 4s_0 < \delta_0 < r_0/24.$$

Weiter sind die Bedingungen $(ii)_0$ trivialerweise wegen des Ansatzes (4.8) erfüllt, sodaß also nur noch $(4.6)_0$, $(4.7)_0$ zu zeigen bleibt.

Es gilt in diesem Fall $(K' \circ \mathfrak{A})^{-1} = E$ und die Entwicklung von

$$(K' \circ \mathfrak{A})^{-1} f(k_0, A_0, \mathfrak{A}_0) = f(k_0, A_0, \mathfrak{A}_0) = \begin{pmatrix} f(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) \\ g(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) \end{pmatrix}$$

nach Potenzen von $\mathfrak{y}$ liefert

$$(K' \circ \mathfrak{A})^{-1} f(k_0, A_0, \mathfrak{A}_0) = \tilde{F}(\mathfrak{f}) + \bar{F}(\mathfrak{f})\mathfrak{y} + O(\mathfrak{y}^2),$$

woraus sich wegen $(4.2)_0$ und Satz 3.4 die Abschätzungen

$$|\tilde{F}(\mathfrak{f})| < M_0, \quad |\bar{F}(\mathfrak{f})| < M_0/4s_0 < M_0/s_0 \quad \text{für } \mathfrak{f} \in D(12\delta_0, 4s_0)$$

ergeben. Die Konstanten M_1, M_2 von Satz 3.6 sind also in diesem Fall durch M_0 und M_0/s_0 zu ersetzen. Damit ergeben die Abschätzungen (3.7), (3.17) leicht

$$|a_1| < 20 M_0, \quad |b_1| < 41 M_0/s_0,$$

wenn wir noch $s := 4s_0$, $s^* := s_0$ setzen.

Der Induktionsanfang ist also mit dem Ansatz (4.8) richtig; wir nehmen an, daß die Behauptungen $(i)_n - (iii)_n$ des Satzes 4.1 für ein $n \geq 0$ zutreffen. Es muß nun im folgenden auf die Gültigkeit von $(i)_{n+1} - (iii)_{n+1}$ geschlossen werden.

Wir definieren dazu folgende Sequenzen von Zahlen

$$(4.10) \quad \delta_n = \delta_0^{\mathfrak{K}_n}; \quad s_n = s_0^{\mathfrak{r}_n}; \quad M_n = M_0^{\mathfrak{A}_n} \quad (n=0,1,\dots).$$

Die Konstanten $\mathfrak{K}, \mathfrak{r}, \mathfrak{A}$ werden später so festgelegt, daß die Zahlenfolgen aus (4.10) Nullfolgen darstellen.

Um die Notation zu vereinfachen, werden wir den Index n weglassen; das Zeichen $+$ steht anstelle des Index $n+1$.

Wir verlangen im folgenden

$$(4.11) \quad 12\delta_+ < \delta < \delta_0 < r_0/24 \quad ; \quad 4s_+ < s < \frac{1}{4}\delta.$$

Diese Relationen sind für genügend kleines δ_0 und geeignete K, r, μ ohne weiteres möglich, wie man sich sofort aus (4.10) klar macht.

Wir haben damit ganz offensichtlich

$$(4.12) \quad D_+ := D(12\delta_+, 4s_+) \subset D(\delta, s).$$

Weiter benötigen wir für den Induktionsschluß

Lemma 4.1 Sei $\mathcal{K}$ aus (2.6) und $K \in P(12\delta, 4s)$ ist die aus der

Induktionsvoraussetzung bekannte Kurve K . Dann ist

(i) Die Abbildung $K' \circ \mathcal{K}$ ist für $f \in D(11\delta, 3s)$ reell analytisch

(ii) Es existiert die zu $K' \circ \mathcal{K}$ inverse Matrix $(K' \circ \mathcal{K})^{-1}$ und die Abbildung

$$f \longmapsto (K' \circ \mathcal{K})^{-1}(f)$$

ist reell analytisch für $f \in D(11\delta, 4s)$.

(iii) Es gilt die Abschätzung

$$(4.13) \quad \|(K' \circ \mathcal{K})^{-1}\| < 2 \quad \text{für } f \in D(11\delta, 4s).$$

Bew.: Wegen $|\operatorname{Im}(\omega + f + b)| < |\operatorname{Im}(f + b)| < 11\delta + 4s < 12\delta$
(3.5) (4.11)

ist die Behauptung in (i) richtig, weil $K \in P(12\delta, 4s)$.

Der Satz 3.2 liefert nun unter Berücksichtigung von (i) dann auch die Richtigkeit der Aussage in (ii). Bleibt also nun noch (iii) zu zeigen. Aus (4.4) wissen wir, daß

$$\|K' - E\| < \frac{1}{2} \quad \text{für } f \in D(12\delta, 4s)$$

ist; wegen oben folgt daraus

$$(4.14) \quad \|K' \circ \mathcal{K} - E\| < \frac{1}{2} \quad \text{für } f \in D(11\delta, 4s).$$

Da $\|E\| = 1$; , liefert jetzt der Satz 3.2 die Gültigkeit von (4.13).

Es existiert also die Abbildung $(K' \circ \mathcal{R})^{-1} f(K, A, \mathcal{R})(f)$, die wir nach Potenzen von γ entwickeln. Wir erhalten

$$(K' \circ \mathcal{R})^{-1} f(K, A, \mathcal{R})(f) = \tilde{F}(f) + \bar{F}(f)\gamma + \sigma(\gamma^2)$$

und suchen nach Lösungen ΔK_+ , ΔA_+ , $\Delta \mathcal{R}_+$ des Gleichungssystems (vgl. (3.20))

$$(4.15) \quad \Delta K_+ \circ \mathcal{R}^* - \mathcal{R}' \Delta K_+ + \Delta \mathcal{R}_+ = \tilde{F}(f) + \bar{F}(f)\gamma + (K' \circ \mathcal{R})^{-1} \Delta A_+ + \left([\tilde{G}_2(f)]^0 + [\tilde{G}_2(f)] \cdot \gamma \right).$$

Es gilt

Lemma 4.2 Das System (4.15) besitzt Lösungen ΔK_+ , ΔA_+ , $\Delta \mathcal{R}_+$, für die gilt

(i) $\Delta K_+ \in P(8\delta, 2s)$ und ΔK_+ kann abgeschätzt werden durch

$$(4.16) \quad |\Delta K_+| < 3 C^* M \delta^{-2\beta} \quad \text{für } f \in D(8\delta, 2s).$$

(ii) Für ΔA_+ , $\Delta \mathcal{R}_+$ gelten die Abschätzungen

$$(4.17) \quad |\Delta a_+| < 20 M \quad ; \quad |\Delta b_+| < 41 M/s.$$

Bew.: Wir wollen dieses Lemma mit Hilfe des Satzes 3.6 beweisen und prüfen deshalb dessen Voraussetzung nach.

Zu V1: Es ist nach Induktionsvoraussetzung $f(K, A, \mathcal{R})(f) \in P(12\delta, 4s)$.

Außerdem ist für $f \in D(11\delta, 4s)$ die Matrix $(K' \circ \mathcal{R})^{-1}$ reell analytisch; dies folgt aus Lemma 4.1. Insgesamt haben wir also

$(K' \circ \mathcal{R})^{-1} f(K, A, \mathcal{R})(f)$ ist ein Element aus $P(11\delta, 4s)$ und der Satz 3.4 liefert dann: $\tilde{F}(f)$, $\bar{F}(f)$, welche aus der obigen Entwicklung von $(K' \circ \mathcal{R})^{-1} f(K, A, \mathcal{R})$ nach γ stammen, sind für $|\operatorname{Im} f| < 11\delta$ reell analytisch.

Zu V2: Unter Beachtung von (4.2) und (4.13) ist

$$|(K' \circ \mathcal{R})^{-1} f(K, A, \mathcal{R})(f)| < 2M \quad \text{für } f \in D(11\delta, 4s)$$

womit wir wegen Satz 3.4 die Abschätzung

$$|\tilde{F}(f)| < 2M \quad ; \quad |\bar{F}(f)| < \frac{2M}{3s} < M/s \quad \text{für } f \in D(11\delta, 4s)$$

erhalten. Damit gilt also V2, wenn wir setzen

$$(4.18) \quad M_1 := 2M ; \quad M_2 := M/s ; r = 11\delta ; s := 4s ; s^* := s$$

Zu V3, V4: V3 trifft unter Berücksichtigung von (4.18) wegen (4.14) zu und V4 wollen wir noch einmal voraussetzen.

Zu V5: Diese Voraussetzung ist ebenfalls erfüllt, da, wie wir oben feststellten, $(K' \cdot \Omega)^{-1}$ reell analytisch ist für $j \in D(11\delta, 4s)$; nun ist mit (3.2) die Richtigkeit von V5 offensichtlich.

Da noch die Zahl ω die Ungleichungen in (0.2.2) erfüllt - dies ist die Voraussetzung c) des 1. Hauptsatzes - treffen insgesamt alle Voraussetzungen von Satz 3.6 zu. Demnach besitzt (4.15) die Lösungen ΔK_+ , ΔA_+ , $\Delta \Omega_+$ und es gilt: $\Delta K_+ \in P(8\delta, 2s)$ und ΔK_+ besitzt die Abschätzung

$$|\Delta K_+| < C^*(M_2s + M_1)\delta^{-2\beta} \stackrel{(4.18)}{<} 3C^*M\delta^{-2\beta} \text{ für } j \in D(8\delta, 2s).$$

Außerdem sind die Abschätzungen in (4.17) ebenfalls richtig. Dies ist unter Berücksichtigung von (4.18) wegen (3.7), (3.17) klar. ■

Wir kehren zurück zu unserer Induktionsbehauptung. Die Ungleichungen von (4.17) beweisen zunächst einmal die Richtigkeit von $(4.6)_+$, $(4.7)_+$.

Wir gehen jetzt an den Nachweis von $(4.3)_+$ und $(4.4)_+$. Aus (4.4) folgern wir zunächst: $\|K'\| < \frac{3}{2}$ für $j \in D(12\delta, 4s)$. Nun liefert (2.7): $\Delta K = K' \Delta K_+$ und (4.16) zieht dann die Ungleichung

$$(4.19) \quad \|\Delta K\| < \frac{9}{2} C^* M \delta^{-2\beta} \text{ für } j \in D(8\delta, 2s)$$

nach sich. Daraus läßt sich sofort aus der Cauchy'schen Abschätzung schließen

$$(4.20) \quad \|\Delta K'\| < \frac{9}{2} C^* M \delta^{-2\beta} s^{-1} \text{ für } j \in D(7\delta, s)$$

Wir werden später $\wedge, \bar{\wedge}$ in einer solchen Größenordnung wählen, daß

$$(4.21) \quad M < s \delta^{2\beta + \frac{2}{3}}$$

noch zusätzlich gilt.

Damit ergeben also die letzten 3 Ungleichungen zusammen

$$|\Delta K| s^{-1} + \|\Delta K'\| < 9 C^* M \delta_s^{-2} \delta_s^{-1} < 9 C^* \delta_s^{\frac{1}{2}} < 9 C^* \delta_0^{\frac{1}{2}} \delta_s^{\frac{1}{2}}.$$

Das letzte Ungleichheitszeichen gilt sicherlich, denn $\delta_0 < 1$ und

κ wird größer 1 gewählt, sodaß wegen (4.10) gilt: $\delta_0 > \delta$.

Ist noch δ_0 so klein, daß noch die folgende Ungleichung zutrifft:

$$(4.22) \quad \delta_0 < \frac{1}{2 \cdot (9C^*)^6},$$

so können wir wegen der letzten Ungleichungskette folgern

$$(4.23) \quad |\Delta K| s^{-1} + \|\Delta K'\| < \frac{1}{2} \delta^{\frac{1}{2}} \quad \text{für } f \in D_+.$$

Diese Abschätzung versetzt uns in die Lage, (4.3)₊, (4.4)₊ leicht zu beweisen.

Lemma 4.3 Für $f \in D_+$ gilt

$$(4.3)_+ \quad |K_+ - f| < \delta_0 - \delta_+.$$

Bew.: Für $f \in D_+$ haben wir wegen $K_+ = K + \Delta K$:

$$\begin{aligned} |K_+ - f| &< |K - f| + |\Delta K| < \delta_0 - \delta + |\Delta K| \\ &< \delta_0 - \delta + \frac{1}{2} \delta^{\frac{1}{2}} < \delta_0 - \delta + \frac{1}{6} \delta \delta^{\frac{1}{2}} < \delta_0 - \delta + \frac{1}{6} \delta < \delta_0 - \delta_+ \end{aligned}$$

(4.23) (4.11)

Lemma 4.4 Für $f \in D_+$ gilt

$$(4.4)_+ \quad \|K'_+ - E\| < \frac{1}{2} - \delta_+^{\frac{1}{2}}.$$

Bew.: Aus (4.23) und (4.10) und der Induktionsvoraussetzung (4.4)_n ergibt sich sofort:

$$\begin{aligned} \|K'_+ - E\| &\leq \|K' - E\| + \|\Delta K'\| < \frac{1}{2} - \delta^{\frac{1}{2}} + \|\Delta K'\| < \\ &\leq \frac{1}{2} - \delta^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \delta^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \delta^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} - \delta_+^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(4.23)

Für den späteren Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionenfolgen ist es noch wichtig festzuhalten:

Lemma 4.5 Für $f \in D_+$ gilt

$$(4.24) \quad |\Delta K| < \delta$$

Bew.: $|\Delta K| \underset{(4.23)}{<} \frac{1}{2} \delta^2 s < \underset{(4.11)}{\frac{1}{8} \delta^2} < \delta$ für $f \in D_+$, denn es ist $\delta < 1$.

Wir prüfen jetzt noch nach, ob $K_+ = K + \Delta K$ ein Element aus $P(12\delta_+, 4s_+)$ ist. Dies ist aber aus den vorangegangenen Betrachtungen klar; denn laut Induktionsvoraussetzung ist $K \in P(12\delta, 4s) \supset P(12\delta_+, 4s_+)$; außerdem gilt wegen oben: $\Delta K = K' \Delta K_+ \in P(9\delta, 2s) \overset{(4.12)}{\supset} P(12\delta_+, 4s_+)$.

Ebenso offensichtlich ist, daß

$$\oint (K_+ \cdot A_+, \Omega_+) = A_+ \circ K_+ - K_+ \circ \Omega_+$$

ein Element aus $P(12\delta_+, 4s_+)$ darstellt, weil die einzelnen Funktionen

$A_+ = A + \Delta A_+$, K_+ , Ω_+ reell analytisch in $D(12\delta_+, 4s_+)$ sind.

Insgesamt ist also der Induktionsschritt bis auf den Nachweis von $(4.2)_+$ vollständig durchgeführt. Der Beweis von $(4.2)_+$ wird im folgenden Abschnitt erbracht.

1.5 Abschätzung des Restglieds und Abschluß des Induktionsbeweises

Wir nehmen uns im folgenden die Gleichung (3.2³) vor und müssen gemäß der Induktionsbehauptung zeigen

$$|f(K + \Delta K, A + \Delta A, \mathcal{R} + \Delta \mathcal{R})(f)| < M_+ \quad \text{für } f \in D_+.$$

Dazu werden wir die ersten 4 Glieder der rechten Seite von (3.23) der Reihe nach abschätzen.

(I) Wir bestimmen eine obere Schranke von $(K' \cdot \mathcal{R})[\Delta^* K \mathcal{R}^* - \Delta^* K \cdot \mathcal{R}]$.

Zuerst haben wir wegen (4.16) und der Cauchyschen Abschätzung

$$(5.1) \quad \left| \frac{\partial}{\partial f} \Delta^* K \right| < 3 C^* M \delta^{-2\beta-1} \quad \text{für } f \in D(7\delta, 2s)$$

und da $\mathcal{R}$ in (2.6) definiert ist und

$$\mathcal{R}^* = \left(\omega + \xi \right)$$

gesetzt war, erhalten wir sofort

$$\begin{aligned} |\Delta^* K \cdot \mathcal{R}^* - \Delta^* K \cdot \mathcal{R}| &= |\Delta^* K(\omega + \xi + b\eta, \eta) - \Delta^* K(\omega + \xi, \eta)| \\ &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} \Delta^* K(\omega + \xi + tb\eta, \eta) dt \right| \leq \left| \frac{\partial \Delta^* K}{\partial \xi}(\omega + \xi + b\eta, \eta) \right| |b\eta|. \end{aligned}$$

Wenn nun $f \in D_+$, ist offensichtlich unter Beachtung von $|b| < 1$ (siehe (3.5)) und

$$|\operatorname{Im}(\omega + \xi + b\eta)| = |\operatorname{Im}(\xi + b\eta)| < |\operatorname{Im} \xi| + |\eta| < 12\delta_+ + 4s_+ < 2\delta$$

die Funktion $\Delta^* K \cdot \mathcal{R}$ erklärt. Da man noch aufgrund von (4.4) sofort erhält

$$\|K'_n\| = \|K'_n - E + E\| \leq \|K'_n - E\| + \|E\| < \frac{3}{2} \quad \text{für } f \in D,$$

folgt nun, daß für $f \in D_+$ ebenfalls gilt

$$(5.2) \quad \|(K'_n \cdot \mathcal{R})\| \leq \frac{3}{2} \quad \text{für } f \in D_+.$$

(5.1) und oben liefern somit wegen $|b\eta| < 4s_+$ für $f \in D_+$:

$$(5.3) \quad |(K' \cdot \mathcal{R})(\Delta^* K \cdot \mathcal{R}^* - \Delta^* K \cdot \mathcal{R})| < 18 C^* M \delta^{-(3.5)-2\beta-1} s_+ \quad \text{für } f \in D_+.$$

(II) Wir fahren fort und schätzen $f(K, A, \mathcal{R})' \Delta^* K$ ab.

Aus (4.2) können wir gleich wegen Satz 3.3 folgern

$$|f(K, A, \mathfrak{A})'(\mathfrak{f})| < \frac{M}{s} \quad \text{für } \mathfrak{f} \in D(11\delta, 3s)$$

und mit (4.16) ergibt sich dann ohne weiteres

$$(5.4) \quad |f(K, A, \mathfrak{A})' \Delta' K(\mathfrak{f})| < 3 C^* M^2 s^{-2} s_+^{-1} \quad \text{für } \mathfrak{f} \in D_+.$$

(III) Gesucht wird jetzt nach einer Abschätzung für $(K' \cdot \mathfrak{A}) \sigma(\eta^2)$.

Dabei steht $\sigma(\eta^2)$ für die Funktion (siehe Seite 62)

$$\begin{aligned} \sigma(\eta^2) &= f(K, A, \mathfrak{A})\left(\frac{\xi}{\eta}\right) - f(K, A, \mathfrak{A})\left(\frac{\xi}{\eta}\right) - \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \eta = \\ &= \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(K, A, \mathfrak{A})(\xi, t\eta)^T dt. \end{aligned}$$

Nun ist aufgrund von (4.2)

$$|f(K, A, \mathfrak{A})(\mathfrak{f})| < M \quad \text{für } \mathfrak{f} \in D(12\delta, 4s),$$

woraus wir jetzt schließen

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(K, A, \mathfrak{A})(\mathfrak{f}) < \frac{2M}{s^2} \quad \text{für } \mathfrak{f} \in D(11\delta, 3s)$$

und es ergibt sich damit aus oben

$$|\sigma(\eta^2)| \leq \int_0^1 (1-t) dt \left| \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(K, A, \mathfrak{A})(\xi, t\eta)^T \right| |\eta|^2 < 2Ms^{-2}s_+^2 \quad \text{für } \mathfrak{f} \in D_+.$$

Unter Beachtung von (5.2) haben wir endlich

$$(5.5) \quad |(K' \cdot \mathfrak{A}) \sigma(\eta^2)| < 3 M s_+^2 s^{-2} \quad \text{für } \mathfrak{f} \in D_+.$$

(IV) Es bleibt noch R abzuschätzen, was in (2.2) definiert ist

und unter Verwendung von (2.3) geschrieben werden kann

$$\begin{aligned} R &= (A + \Delta A) \cdot (K + \Delta K) - (K + \Delta K) \cdot (\mathfrak{A} + \Delta \mathfrak{A}) - A \cdot K + K \cdot \mathfrak{A} - (A' \cdot K) \Delta K \\ &\quad + \Delta K \cdot \mathfrak{A} - \Delta A \cdot K + (K' \cdot \mathfrak{A}) \Delta \mathfrak{A}. \end{aligned}$$

Wir spalten R geeignet auf in der Form $R = R_1 + R_2 + R_3$, wobei

$$(5.6) \quad \begin{cases} R_1 = (A + \Delta A) \cdot (K + \Delta K) - A \cdot K - (A' \cdot K) \Delta K - \Delta A \cdot K = \\ \quad = (A + \Delta A) \cdot (K + \Delta K) - (A + \Delta A) \cdot K - (A' \cdot K) \Delta K \\ R_2 = -[(K + \Delta K) \cdot (\mathfrak{A} + \Delta \mathfrak{A}) - \Delta K \cdot \mathfrak{A} - (K' \cdot \mathfrak{A}) \Delta \mathfrak{A} - K \cdot \mathfrak{A} - \\ \quad - (\Delta K' \cdot \mathfrak{A}) \Delta \mathfrak{A}] = -[(K + \Delta K) (\mathfrak{A} + \Delta \mathfrak{A}) - (K + \Delta K) \mathfrak{A} - ((K' + \Delta K') \cdot \mathfrak{A}) \Delta \mathfrak{A}] \\ R_3 = -(\Delta K' \cdot \mathfrak{A}) \Delta \mathfrak{A} \end{cases}$$

Es wird nun unsere Aufgabe sein Abschätzungen für R_1, R_2, R_3 zu finden.

Zuerst betrachten wir R_1 . Beachten wir, daß ΔA ein konstanter Vektor ist, so gilt also

$$(A + \Delta A)(K + \Delta K) = A(K + \Delta K) + \Delta A \cdot K ; (A + \Delta A) \cdot K = A \cdot K + \Delta A$$

und wir dürfen folglich schreiben

$$R_1 = A \cdot (K + \Delta K) - A \cdot K - (A' \cdot K) \Delta K$$

und demnach haben wir

$$R_1(\gamma) = \int_0^1 (1-t) \frac{d^2}{dt^2} A(K(\gamma) + t \Delta K(\gamma)) dt$$

oder

$$(5.7) \quad R_1(\gamma) = \Delta^T K(\gamma) \left[\int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 A}{\partial \gamma^2} (K(\gamma) + t \Delta K(\gamma)) dt \right] \Delta K(\gamma)$$

Jetzt halten wir zunächst einmal fest, daß das hier verwendete A unsere Ausgangsabbildung in (o.3.4) darstellt und deshalb für $\gamma \in D(12\delta_0, 12\delta_0)$ definiert ist. (vgl. dazu (4.9) und (o.2.4))

Wir zeigen

Lemma 5.1 Für $\gamma \in D_+$ und $0 \leq t \leq 1$ gilt

$$K(\gamma) + t \Delta K(\gamma) \in D(12\delta_0, 12\delta_0)$$

Bew.: Wegen (4.3)₊ und (4.24) erhalten wir für $\gamma \in D_+$:

$$|K(\gamma) - \gamma + t \Delta K(\gamma)| \leq |K(\gamma) - \gamma| + |t \Delta K(\gamma)| \leq \delta_0 + \delta \leq 2\delta_0.$$

Damit wird die Behauptung offensichtlich. ■

Wir sehen also, daß $A \cdot (K + \Delta K)$ für $\gamma \in D_+$ definiert ist und wie oben liefert nun die Cauchysche Abschätzung

$$(5.8) \quad \left| \frac{\partial^2 A}{\partial \gamma^2} (K(\gamma) + t \Delta K(\gamma)) \right| \leq 2 M_0 / (2\delta_0)^2 \quad \text{für } \gamma \in D_+,$$

denn es ist

$$\left| \frac{\partial^2 A}{\partial \gamma^2}(\gamma) \right| \leq 2 M_0 / (2\delta_0)^2 \quad \text{für } \gamma \in D(10\delta_0, 10\delta_0).$$

Da wir außerdem wegen (4.19) noch haben

$$|\Delta K| \leq \frac{9}{2} C M \delta^{-2\beta} \quad \text{für } \gamma \in D(8\delta, 2s),$$

erhalten wir dann mit (5.7) und (5.8) die Abschätzung

$$|R_1(\gamma)| \leq 11 \frac{M}{\delta^4} C^2 M^2 \delta^{-4\beta} \quad \text{für } \gamma \in D_+.$$

Verlangen wir noch die Gültigkeit von

$$(5.9) \quad M_0 < \delta_0^3, \quad \delta_0 < 1/11C^{*2},$$

so gilt nun die Abschätzung

$$(5.10) \quad |R_1(f)| < M^2 \delta^{-4\beta} \quad \text{für } f \in D_+.$$

Wir wenden uns nun R_2 zu. Wegen (5.6) können wir genau wie für $R_1(f)$ die (5.7) entsprechende Formel

$$(5.11) \quad R_2(f) = \Delta R^T(f) \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2}{\partial s^2} (K + \Delta K) (\mathcal{R}(f) - t \Delta \mathcal{R}(f)) dt \Delta \mathcal{R}(f)$$

herleiten. Wir interessieren uns zunächst einmal für eine Abschätzung von $\frac{\partial^2}{\partial s^2} (K + \Delta K)$. Wir beweisen

Lemma 5.2 Für $f \in D(6\delta, s)$ gilt

$$|\frac{\partial^2}{\partial s^2} (K + \Delta K)| < 10 C^* M_0 \delta^{-2\beta-1} s^{-1}.$$

Bew.: Die Ungleichungen (4.3), (4.11), (4.19) liefern für $f \in D(8\delta, 2s)$:

$$\begin{aligned} |K + \Delta K| &\leq |K| + |\Delta K| \leq |K - f| + |f| + |\Delta K| \leq \\ &\leq \delta_0 - \delta + 8\delta + 5 C^* M \delta^{-2\beta} \leq 2\delta_0 + 5 C^* M \delta^{-2\beta} < \\ &< 10 C^* M_0 \delta^{-2\beta}, \end{aligned}$$

denn o.B.d.A. können wir noch voraussetzen

$$(5.12) \quad 2\delta_0 < 5 C^* M_0 \delta^{-2\beta} < 5 C^* M_0 \delta^{-2\beta}.$$

Nun liefert die Cauchysche Abschätzung

$$|\frac{\partial^2}{\partial s^2} (K + \Delta K)(f)| < 5 C^* M \delta^{-2\beta} s^{-1} \quad \text{für } f \in D(7\delta, s).$$

Da wir weiterhin wissen, daß K und auch ΔK linear in $\mathcal{R}$ sind, gilt also

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} (K + \Delta K)(f) = 0.$$

Folglich bekommen wir für $f \in D(6\delta, s)$:

$$|\frac{\partial^2}{\partial s^2} (K + \Delta K)(f)| = |\frac{\partial^2}{\partial s^2} (K + \Delta K)(f)| < 5 C^* M \delta^{-2\beta-1} s^{-1}$$

und der Beweis des Lemmas ist abgeschlossen. ■

Als nächstes müssen wir noch sicherstellen, daß für $f \in D_+$ und $0 \leq t \leq 1$ der Ausdruck $(K + \Delta K)(\mathcal{R}(f) + t \Delta \mathcal{R}(f))$ definiert ist. Zunächst gilt:

Lemma 5.3 Wenn $f \in D_+$ und $0 \leq t \leq 1$, so ist $\mathcal{R}(f) + t\Delta\mathcal{R}(f)$ ein Element aus $D(2\delta, s)$.

Bew.: Wegen (2.14) und (3.5) ist die folgende Abschätzung offenbar:

$$|\Delta\mathcal{R}(f)| = |\Delta b \cdot \gamma| \leq |\gamma| \leq 4s_+ \quad \text{für } f \in D_+.$$

Weiter läßt sich $\mathcal{R}(f) + t\Delta\mathcal{R}(f)$ ausführlich in der Form schreiben

$$\mathcal{R}(f) + t\Delta\mathcal{R}(f) = (\omega + \xi + b\gamma + \Delta b \cdot \gamma t)$$

und weil noch wegen (3.5) und der letzten Abschätzung für $0 \leq t \leq 1$,

$$f \in D_+ \text{ gilt: } |\operatorname{Im}(\omega + \xi + t b \gamma)| \leq 12\delta_+ + 8s_+ \stackrel{(4.11)}{\leq} 2\delta_+,$$

wird insgesamt die Behauptung des Lemmas einsichtig. ■

Wegen der Induktionsvoraussetzung (ii)_n gilt: $K \in P(12\delta, 4s)$; außerdem wurde auf Seite 63 gezeigt: $\Delta K \in P(8\delta, 2s)$, sodaß wir also insgesamt haben: $K + \Delta K \in P(8\delta, 2s)$. Das letzte Lemma stellt somit sicher, daß $(K + \Delta K) \circ (\mathcal{R} + t\Delta\mathcal{R})$ für $0 \leq t \leq 1, f \in D_+$ erklärt ist und Lemma 5.2

liefert: $(\frac{3}{2})^2 (K + \Delta K)(\mathcal{R}(f) + t\Delta\mathcal{R}(f)) \leq 10 C^* M_0 \delta^{-2\beta-1} s^{-1}$ für $f \in D_+$.

Um jetzt R_2 entgültig abzuschätzen, benötigen wir noch eine schärfere Abschätzung für $|\Delta\mathcal{R}(f)|$, als sie oben gegeben wurde. (4.7) liefert

$$(5.13) \quad |\Delta\mathcal{R}(f)| \leq 41 \frac{M}{s} s_+ \quad \text{für } f \in D_+.$$

Unter Verwendung von (5.11) erhalten wir damit endlich

$$(5.14) \quad |R_2(f)| \leq 16810 C^* M_0 M^2 \delta^{-2\beta-1} s^{-3} s_+^2 \quad \text{für } f \in D_+.$$

Zum Schluß brauchen wir noch die Abschätzung von $R_3 = -(\Delta K' \circ \mathcal{R}) \Delta\mathcal{R}$.

Aus (4.20) lesen wir sofort die Gültigkeit von

$$\|\Delta K' \circ \mathcal{R}\| \leq \frac{9}{2} C^* M \delta^{-2\beta} s^{-1} \quad \text{für } f \in D(7\delta, s)$$

ab und da noch wegen (5.13) und $s_+ \leq s$ für $f \in D_+$ offensichtlich gilt:

$$|\Delta\mathcal{R}(f)| \leq 41 M,$$

gelangen wir schließlich zu

$$(5.15) \quad |R_3(f)| \leq 185 C^* M^2 \delta^{-2\beta} s^{-1} \quad \text{für } f \in D_+.$$

Damit haben wir alle Glieder der rechten Seite von (3.22) mit Ausnahme des letzten Gliedes abgeschätzt. Wie schon bemerkt, ist dieser Term kritisch, da er dem Augenschein nach nicht von höherer Ordnung ist und sich betragsmäßig in der Größenordnung von M bewegt. Zur Abkürzung setzen wir

$$(5.16) \quad h = [\tilde{G}_2] + [\bar{G}_2] \cdot \gamma$$

und schätzen erst später den Term $(K' \cdot \mathcal{R}) \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$ ab.

Die Gleichung (3.23) liefert unter Verwendung der Abschätzungen in (5.3), (5.4), (5.5), (5.10), (5.14), (5.15) für $\mathcal{J} \in D_+$ die folgende Relation:

$$(5.17) \quad \left| f(K_+, A_+, \mathcal{R}_+) - (K' \cdot \mathcal{R}) \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} \right| < \frac{9}{2} C^* M \delta^{-2\beta-1} s_+ + \\ + 3 C^* M^2 \delta^{-2\beta} s_+^{-1} + 3 M s_+^2 s_-^{-2} + M^2 \delta^{-4\beta} + \\ + 16810 C^* M_0 M^2 \delta^{-2\beta-1} s_+^{-3} s_+^2 + 185 C^* M^2 \delta^{-2\beta} s_+^{-1}.$$

Wir wollen μ, χ, σ so bestimmen, daß gilt:

$$\begin{aligned} 1) \quad M^2 \delta^{-4\beta} &\leq M s_+^2 s_-^{-2} & 2) \quad M^2 \delta^{-2\beta-1} s_+^{-3} s_+^2 &\leq M s_+^2 s_-^{-2} \\ 3) \quad M^2 \delta^{-2\beta-1} &\leq M s_+^2 s_-^{-2} & 4) \quad M \delta^{-2\beta-1} s_+ &\leq M s_+^2 s_-^{-2} \end{aligned}$$

Im Hinblick auf die Induktionsbehauptung $(4.2)_+$ muß insbesondere dann noch gelten

$$5) \quad M s_+^2 s_-^{-2} < M_+$$

und außerdem haben wir in (4.21) vorausgesetzt

$$6) \quad M < s \delta^{2\beta} + \frac{2}{3}$$

Diese sechs Ungleichungen liefern unter Beachtung von (4.12) die folgenden Bedingungen für μ, σ, χ :

$$\begin{aligned} (i) \quad 2\sigma(\chi - 1) + 4\beta s \mu & \quad (ii) \quad \sigma + 2\beta + 1 \leq \mu \\ (iii) \quad (2\chi - 1) + 2 s \mu & \quad (iv) \quad 2\beta + 1 \leq \sigma(2 - \chi) \\ (v) \quad \mu(\chi - 1) &\leq 2\sigma(\chi - 1) \quad (vi) \quad \sigma + 2\beta + \frac{2}{3} \leq \mu. \end{aligned}$$

Zusätzlich wissen wir, daß μ, χ, σ alle größer Null sein müssen; insbesondere muß $\chi > 1$ gelten, da sonst die Folgen in (4.12)

keine Nullfolgen ergeben und wir deshalb keine Konvergenz erzeugen könnten. Der Parameter κ kennzeichnet außerdem die Schnelligkeit des Konvergenzverfahrens. Aus der Bedingung (iv) leiten wir noch sofort ab, daß

$$1 < \kappa < 2$$

erfüllt sein muß. Wir setzen $\kappa = 1.1$ und sehen nach leichter Rechnung, daß die Ungleichungen (i) - (vi) alle richtig sind, wenn wir wählen

$$(5.18) \quad \kappa = 1.1 ; \quad \beta = 1.2 ; \quad \mu = 10 ; \quad \sigma = 5.1 .$$

Der Hauptsatz wird also ausschließlich mit diesen Zahlen bewiesen. Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Konstante β aus den Ungleichungen (0.2.2) O.B.d.A. auf 1.2 festgelegt werden darf; denn ist $\beta < 1.2$, so ist erst recht (0.2.2) mit $\beta' = 1.2$ erfüllt; im Falle $\beta > 1.2$ müßten dann μ, σ im Verhältnis entsprechend geändert werden.

O.B.d.A. setzen wir noch $M_0 < 1$ voraus; aufgrund der erfüllten Bedingungen 1) - 4) läßt sich dann (5.17) zusammenfassen zu

$$\begin{aligned} |f(K_+, A_+, \alpha_+) - (K' \cdot \alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}| &< (17003 C^* + 4) M_+^2 s^{-2} = \\ &= (17003 C^* + 4) \delta^{2\kappa\sigma - 2\sigma - \kappa\mu + \kappa\mu} = (17003 C^* + 4) \delta^{\tau} M_+ \leq \\ (4.12) \quad &\leq (17003 C^* + 4) \delta_0^{\tau} M_+ . \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung trifft zu, denn wegen der Bedingung (v) ist

$$\tau := \mu + 2\kappa\sigma - 2\sigma - \kappa\mu$$

größer Null. Wählen wir noch δ_0 so klein, daß wir haben

$$(17003 C^* + 4) \delta_0^{\tau} < \frac{1}{4}$$

oder

$$(5.19) \quad \delta_0 < 1/(68012 C^* + 16)^{\frac{1}{\tau}} ,$$

so erhalten wir schließlich

$$(5.20) \quad |f(K_+, A_+, \alpha_+) - (K' \cdot \alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}| < \frac{1}{4} M_+ \quad \text{für } j \in D_+ .$$

Wie kommen wir jetzt an eine geeignete Abschätzung von $(K' \circ \mathcal{R}) \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$?
Dabei fällt uns ein, daß wir im Laufe des Konvergenzbeweises kein einziges Mal die Schnittbedingung unserer Ausgangsabbildung A_0 benutzt haben.

Wir betrachten dazu für ein festes $\eta \in \mathbb{R}$ mit $-4s_+ < \eta < 4s_+$ die reell analytische Kurve

$$z = K_+(\xi, \eta) \quad ,$$

welche sich wegen (4.4)₊ in die Form

$$y = \phi_+(\xi) = \phi_+(\xi + 2\eta)$$

bringen läßt. Wir rufen uns jetzt noch Lemma 1.3 ins Gedächtnis und wissen, daß mit A_0 auch die Abbildung

$$A_+ = A_0 + \begin{pmatrix} a a_1 + \dots + a a_{n+1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ebenfalls inhaltstreu ist. Da noch $|\phi_+| < \delta_0 < r_0$ ist, (siehe (4.3)₊), finden wir also reelle Argumente $\xi_0 = \xi_0(\eta)$, $\xi_1 = \xi_1(\eta)$ für die gilt

$$(A_+ \circ K_+)(\xi_0, \eta) = K_+(\xi_1, \eta) \quad .$$

Daraus erhalten wir unter zusätzlicher Verwendung von (2.1)

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathcal{F}(K_+ \circ A_+ \circ \mathcal{R}_+) - (K' \circ \mathcal{R}) \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} \right\}(\xi_0, \eta) = \\ & = \left\{ (A_+ \circ K_+) - (K_+ \circ \mathcal{R}_+) - \frac{\partial (K \circ \mathcal{R})}{\partial \eta} \cdot h(\eta) \right\}(\xi_0, \eta) = \\ & = K_+(\xi_1, \eta) - K_+(\xi_2, \eta) - \frac{\partial K}{\partial \eta}(\omega + \xi_0 + b_n \eta, \eta) \cdot h(\eta) \\ & = Q(\eta) \begin{pmatrix} \xi_1 - \xi_2 \\ -h(\eta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$Q(\eta) = \left(\int_0^1 \frac{\partial K}{\partial \xi}(\xi_1 + t(\xi_1 - \xi_2), \eta) dt, \frac{\partial K}{\partial \eta}(\omega + \xi_0 + b_n \eta, \eta) \right) \quad .$$

Dabei haben wir noch verwendet, daß es ein $\xi_2 \in \mathbb{C}$ gibt, sodaß

$$(K_+ \circ \mathcal{R}_+)(\xi_0, \eta) = K_+(\xi_2, \eta) \quad ,$$

denn es ist

$$(K_+ \circ \mathcal{R}_+)(\xi_0, \eta) = \begin{pmatrix} K_1(\omega + \xi_0 + b_{n+1} \eta, \eta) \\ K_2(\omega + \xi_0 + b_{n+1} \eta, \eta) \end{pmatrix} =: K_+(\xi_2, \eta) \quad .$$

Obendrein können wir noch für $\xi_2 := \omega + \xi_0 + b_{n+1} \zeta$ festhalten, daß $\xi_2 \in \mathbb{R}$, denn ω, ξ_0, ζ sind nach Voraussetzung aus $\mathbb{R}$. Diese Eigenschaft trifft aber auch für b_{n+1} zu, denn dieser Wert wird durch Mittelwerte reell analytischer Funktionen festgelegt und muß deshalb reell sein. (Vgl. dazu Satz 3.1!)

Da wir es bei $Q(\zeta)$ nur mit reellen Argumenten zu tun haben, dürfen wir (4.4) bzw. (4.4)₊ benutzen und erhalten

$$\|Q(\zeta) - E\| < \frac{1}{2} \quad -4s_+ < \zeta < 4s_+.$$

Daraus folgern wir sofort (siehe Satz 3.2)

$$\|Q(\zeta)^{-1}\| < 2 \quad -4s_+ < \zeta < 4s_+.$$

Damit haben wir nun

$$|h(\zeta)| \leq \left| \begin{pmatrix} \xi_1 \\ -h(\zeta) \end{pmatrix} \right| = \left| Q^{-1}(\zeta) Q(\zeta) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ -h(\zeta) \end{pmatrix} \right| \\ 2 \left| Q(\zeta) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ -h(\zeta) \end{pmatrix} \right| \leq M_+/2 \quad -4s_+ < \zeta < 4s_+.$$

(5.20)

Also gilt auch

$$|h(\zeta)| < M_+/2 \quad \text{für } |\zeta| < 4s_+$$

und es ergibt sich endlich

$$\left| \int (K_+ A_+ \alpha_+)(\zeta) \right| < \|(K' \cdot \alpha)\| |h| + \frac{1}{4} M_+ < \\ < \frac{3}{4} M_+ + \frac{1}{4} M_+ = M_+ \quad \text{für } \zeta \in D_+.$$

(5.2)

Somit ist auch (4.2)₊ bewiesen und insgesamt also ist der Induktionsbeweis abgeschlossen, wenn wir noch die des öfteren benutzte Beziehung (3.5) $|b| < 1$ nachweisen. Es ist zunächst

$$|b_{n+1} - b_n| = |\Delta b_{n+1}| \stackrel{(4.7)}{<} 41 M/s = 41 \delta^{\wedge -r} < 41 \delta. \quad (4.10)$$

Letzte Ungleichung resultiert aus (5.18). Da weiter gilt

$$b = \Delta b_1 + \Delta b_2 + \dots,$$

haben wir also

$$|b| < \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \stackrel{(4.12)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_0^{\wedge -n} < \delta_0 \sum_{n=0}^{\infty} \delta_0^{\wedge (n-1)} = \\ = \frac{\delta_0}{1 - \delta_0^{\wedge -1}} < 1/41$$

wenn nur δ_0 klein genug gewählt wird.

Die Ungleichung (3.5) ist also richtig und wir sind fertig.

1.6 Die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolgen und Abschluß des Beweises des Existenzsatzes

In diesem Abschnitt wird der Frage nachgegangen, was mit den Funktionen $K_n, A_n, \mathcal{Q}_n$ von Satz 4.1 geschieht, wenn $n \rightarrow \infty$.
Wir zeigen zuerst

Lemma 6.1 Die Funktionenfolge K_n ($n=0,1,\dots$) konvergiert gleichmäßig im Bereich

$$D(0,0) := \left\{ \zeta = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mid |\operatorname{Im} \zeta| < r_0/2 \right\}.$$

Bew.: Zunächst haben wir für $\zeta \in D(12\delta_n, 4s_n)$ wegen (4.24) :

$$|K_{n+1} - K_n| = |\Delta K_n| < \delta_n,$$

woraus wir jetzt schließen

$$\begin{aligned} |K_{n+p} - K_n| &< \sum_{k=n}^{n+p} \delta_k \stackrel{(4.12)}{=} \delta_0^{\mathcal{K}} + \sum_{k=1}^p \delta_0^{\mathcal{K}+1} \cdot 1 \\ &= \delta_0^{\mathcal{K}} + \sum_{k=1}^p \delta_0^{k+n} \int_{k-1}^k dk \leq \delta_0^{\mathcal{K}} + \int_0^p \delta_0^{n+\mathcal{K}} d\mathcal{K} \\ &= \delta_0^{\mathcal{K}} + \frac{1}{\log \mathcal{K}} \int_0^p \delta_0^{\mathcal{K}+1} \cdot \frac{d\mathcal{K}}{\mathcal{K}} \leq \delta_0^{\mathcal{K}} + \frac{1}{\log \mathcal{K}} \delta_0^{\mathcal{K}+1} d\mathcal{K} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n \cdot \log \mathcal{K} \log \frac{1}{\delta_0}}\right) \delta_0^{\mathcal{K}}. \end{aligned}$$

Da noch $\mathcal{K} > 1$, ist also $\{\delta_n\}$ eine Nullfolge. Wegen der offensichtlichen Beschränktheit der Klammer geht also der letzte Term mit wachsendem n gegen Null. Da nun noch alle Folgefunktionen K_n im Bereich $D(0,0)$ laut Aussage von Satz 4.1 definiert sind, haben wir somit die gleichmäßige Konvergenz der Folge $\{K_n\}$ im angegebenen Gebiet bewiesen. ■

Das letzte Lemma erlaubt uns also jetzt, die Funktion

$$(6.1) \quad K_\infty(\zeta) := \lim_{n \rightarrow \infty} K_n(\zeta, 0) \quad -\infty < \zeta < \infty$$

zu definieren, welche reell analytisch in $D(0,0)$ ist und die

Periode 2π in $\mathfrak{f}$ hat. Denn jedes K_n ist reell analytisch und 2π -periodisch in $\mathfrak{f}$ und es ist klar, daß sich diese beiden Eigenschaften wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $\{K_n\}$ auf die Grenzfunktion K_∞ vererben.

Was ist nun $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$? Bezeichne wieder A_0 unsere Ausgangsabbildung (o.2.4), so ist also (vgl. (2.13))

$$A_n = A_0 + \Delta A_1 + \Delta A_2 + \dots + \Delta A_n = A_0 + \begin{pmatrix} \Delta a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} \Delta a_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

und unter Beachtung von (4.6) erhalten wir wieder sofort

$$|A_{n+p} - A_n| < |\Delta a_{n+1}| + \dots + |\Delta a_{n+p}| < 2\alpha \sum_{k=n}^{\infty} \delta_k < 2\alpha \sum_{k=n}^{\infty} \delta_k \quad (5.18)$$

und deswegen oben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} \delta_k = 0,$$

existiert somit

$$a := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \Delta a_k$$

und wir setzen

$$(6.2) \quad A_\infty := A_0 + \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da weiter noch für $\lambda = 0$ offensichtlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}_n(\mathfrak{f}, 0) = \mathcal{R}^* = \begin{pmatrix} \infty & 3 \end{pmatrix}$$

zutrifft, ergibt (4.2) wegen (6.1), (6.2) endlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(K_n, A_n, \mathcal{R}_n)(\mathfrak{f}) = \mathcal{J}(K_\infty, A_\infty, \mathcal{R}^*)(\mathfrak{f}) = 0 \quad \text{für } \mathfrak{f} \in D(0,0)$$

Damit ist bewiesen, daß K_∞ eine invariante Kurve der Abbildung

A_∞ aus (6.2) ist, womit der Beweis des ersten Hauptsatzes im wesentlichen abgeschlossen ist.

Was bleibt, ist der Nachweis der Richtigkeit der Aussage in (o.3.9).

Es ist für $\lambda = 0$:

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \Delta K_1 + \Delta K_2 + \dots$$

Wir wissen aber jetzt, daß aufgrund der Behauptung von Satz 3.6

(siehe 3.22) und der Beziehung (2.7) die zu jedem Summanden ΔK_n gehörenden Reihen den Mittelwert Null haben. Wegen der Additivität

der Mittelwertbildung trifft dies dann auch zu auf die Reihen U, V .

Damit sind wir mit dem Beweis des ersten Hauptsatzes am Ende.

1.7 Eine gestörte Twistabbildung unter zusätzlicher Abhängigkeit eines komplexen Parameters

Wir erinnern uns, daß wir bei der formalen Lösung des Problems im 1. Abschnitt die Funktionen f, g der Ausgangsabbildung (0.3.4) holomorph von einem Parameter ϵ abhängen ließen. Der Konvergenzsatz hingegen wurde nur für Abbildungen f, g bewiesen, welche reell analytisch in

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |\operatorname{Im} x| < r_0, |y| < r_0\}$$

waren. Es besteht nun ein Interesse daran, ein dem 1. Hauptsatz entsprechendes Resultat zu beweisen, wenn wir zusätzlich die analytische Parameterabhängigkeit von ϵ für f, g voraussetzen. Ein solches Ergebnis hat nämlich den Vorteil, daß unter gewissen noch näher zu bestimmenden Voraussetzungen das Konstruktionsverfahren im 1. Abschnitt eben genau die invariante Kurve K konstruiert, deren Konvergenz das zu dem 1. Hauptsatz analoge Resultat garantiert.

Wir nehmen also im folgenden an, $\epsilon f, \epsilon g$ sind analytisch in dem festen komplexen Gebiet

$$D^* = \{(x, y, \epsilon) \in \mathbb{C}^3 \mid |\operatorname{Im} x| < r_0, |y| < r_0, |\epsilon| < \epsilon_0\}.$$

Weiter gelte die Abschätzung

$$(7.1) \quad |f(x, y, \epsilon)| + |g(x, y, \epsilon)| < \hat{M} \quad \text{für } (x, y, \epsilon) \in D^*.$$

Im Hinblick auf (0.3.5) wählen wir jetzt $\epsilon_0 > 0$ so klein, daß gilt

$$|\epsilon|(|f| + |g|) < M_0$$

und M_0 stammt aus (0.3.5). Wegen (4.10) wählen wir ϵ_0 in einer solchen Größenordnung, daß folgendes zutrifft:

$$(7.2) \quad 0 < |\epsilon| \leq \epsilon_0 := \frac{1}{2} \delta_0^{\wedge} / \hat{M}.$$

δ_0 ist in (5.18) festgelegt und δ_0 genügt noch der Bedingung (vgl. (4.13), (4.22), (5.9), (5.19)):

$$\delta_0 \leq \min \left\{ r_0/24, \frac{1}{2}(9 C^*)^{-6}, 1/11 C^{\wedge 2}, 1/(68012 C^* + 16)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

Der Vorteil, ε_0 in der Form (7.2) zu wählen, besteht darin, daß sich Abschätzungen, insbesondere aber die Konstanten in den Abschnitten 3 - 5 nicht ändern, wenn wir die Analytizität von $\varepsilon f, \varepsilon g$ in ε fordern. Wir beweisen

Satz 7.1

Vor.: a) Gegeben ist die Abbildung A_0 der Gestalt

$$x_1 = \omega + x + \varepsilon f(x, y, \varepsilon)$$

$$y_1 = y + \varepsilon g(x, y, \varepsilon) .$$

Dabei sind $\varepsilon f, \varepsilon g$ analytische Funktionen in

$$D^* = \{ (x, y, \varepsilon) \in \mathbb{C}^3 \mid |\operatorname{Im} x| < r_0, |y| < r_0, |\varepsilon| < \varepsilon_0 \} .$$

Es gilt die Abschätzung (7.1) und ε_0 ist in (7.2) festgelegt.

$\varepsilon f, \varepsilon g$ sind reell für reelle Argumente und sind 2π -periodisch in $\mathbb{F}$.

b) ω erfüllt die Ungleichungen in (0.2.2) .

c) A_0 ist inhaltstreu.

Beh.: (i) Es existiert ein Parameter $a = a(\varepsilon)$ derart, daß die Abb.

$$(7.3) \quad A^* := A_0 + \begin{pmatrix} a(\varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine analytische Kurve K mit

$$z = K(\mathbb{F}, \varepsilon) : \quad \begin{aligned} x_1 &= \mathbb{F} + U(\mathbb{F}, \varepsilon) \\ y_1 &= V(\mathbb{F}, \varepsilon) \end{aligned}$$

besitzt und die U, V sind 2π -periodische Reihen in $\mathbb{F}$ und haben bei reellen Argumenten reelle Werte.

(ii) Die auf dieser Kurve K induzierte Abbildung ist eine Translation der Gestalt $\mathbb{F}_1 = \omega + \mathbb{F}$.

(iii) Für die Mittelwerte von U, V gilt

$$[U] = [V] = 0 .$$

Bew.: Der Beweis dieses Satzes wird darin bestehen, daß wir die Abschnitte 2 - 6 überall an den Stellen passend umformulieren, wo sich

Realitätsbedingungen durch die Einführung des Parameter ε ändern. Es sei jedoch schon hier festgehalten, daß sich die Argumentation in den vorangegangenen Abschnitten im wesentlichen aufrecht erhalten läßt und richtig bleibt, wenn man überall dort, wo die reelle Analytizität gefordert wird, diese Bedingung ersetzt durch die Forderung, daß die betrachteten Funktionen analytisch sind und reelle Werte für reelle Argumente besitzen. Diese letzte Aussage wird im folgenden konkretisiert werden.

Wir betrachten als erstes den 2. Abschnitt und sehen, daß sich die Überlegungen dort wörtlich wiederholen lassen, auch wenn die Funktionen $A, K, \Delta K$ holomorph von einem zusätzlichen Parameter ε abhängen. Die Gleichung (2.10) geht über in

$$(K' \cdot \Delta) \cdot \mathcal{F}(K, A, \Delta)(\mathcal{F}, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \tilde{F}_1(\mathcal{F}, \varepsilon) \\ \tilde{F}_2(\mathcal{F}, \varepsilon) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{F}_1(\mathcal{F}, \varepsilon) \\ \bar{F}_2(\mathcal{F}, \varepsilon) \end{pmatrix} + \sigma(\eta^2) .$$

Auch ändert sich selbstverständlich der Ansatz für ΔK ab zu

$$\Delta^* K(\mathcal{F}, \varepsilon) = \begin{pmatrix} u(\mathcal{F}, \varepsilon) + w(\mathcal{F}, \varepsilon) \\ v(\mathcal{F}, \varepsilon) + z(\mathcal{F}, \varepsilon) \end{pmatrix} .$$

Anstelle von (3.1) haben wir jetzt die linearisierten Gleichungen zu lösen:

$$\begin{aligned} u(u+\mathcal{F}, \varepsilon) - u(\mathcal{F}, \varepsilon) - bv(\mathcal{F}, \varepsilon) + [w(u+\mathcal{F}, \varepsilon) - w(\mathcal{F}, \varepsilon) - bz(\mathcal{F}, \varepsilon) + \Delta b] \eta &= \\ &= \tilde{F}_1(\mathcal{F}, \varepsilon) + \bar{F}_1(\mathcal{F}, \varepsilon) \eta + A_1(\mathcal{F}, \varepsilon) \Delta a \\ (7.4) \quad v(u+\mathcal{F}, \varepsilon) - v(\mathcal{F}, \varepsilon) - [z(u+\mathcal{F}, \varepsilon) - z(\mathcal{F}, \varepsilon)] \eta &= \\ &= \tilde{F}_2(\mathcal{F}, \varepsilon) + \bar{F}_2(\mathcal{F}, \varepsilon) \eta + A_2(\mathcal{F}, \varepsilon) \Delta a . \end{aligned}$$

Es erhebt sich nun die Frage, unter welchen Voraussetzungen sich diese Differenzengleichungen lösen lassen. Analog zu Satz 3.6 gilt:

Satz 7.2

Vor.: a) $\tilde{F}_1, \bar{F}_1, \tilde{F}_2, \bar{F}_2$ sind analytisch in dem komplexen Gebiet

$$D = \{ (\mathcal{F}, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2 \mid |\operatorname{Im} \mathcal{F}| < r, |\varepsilon| < \varepsilon_0 \}$$

und haben reelle Werte für reelle Argumente.

b) Es gelten die Abschätzungen

$$|\tilde{F}(\xi, \varepsilon)| < M_1; |\bar{F}(\xi, \varepsilon)| < M_2 \quad \text{für} \quad |\operatorname{Im} \xi| < r-s^*, \quad |\varepsilon| < \varepsilon_0.$$

c) Außerdem ist

$$R(K' \circ \mathcal{Q}) - E \| < \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad |\operatorname{Im} \xi| < r-s^*, \quad |\eta| < s-s^*, \quad |\varepsilon| < \varepsilon_0.$$

d) Der Wert b erfüllt die Ungleichung $|b| < 1$.

e) Die Funktionen $A_1(\eta, \varepsilon), A_2(\eta, \varepsilon)$ definiert durch

$$(K' \circ \mathcal{Q})^{-1} \Delta A := \begin{pmatrix} A_1(\eta, \varepsilon) \Delta a \\ A_2(\eta, \varepsilon) \Delta a \end{pmatrix}$$

sind analytisch für $|\operatorname{Im} \xi| < r-s^*, |\eta| < s-s^*, |\varepsilon| < \varepsilon_0$ und reell für reelle Argumente.

Beh.: Das System (7.4) besitzt Lösungen $\Delta^* K, \Delta A, \Delta \mathcal{Q}$ für die gelten: Die in ξ 2π -periodische Kurve

$$\Delta^* K = \begin{pmatrix} u(\xi, \varepsilon) + w(\xi, \varepsilon) \\ v(\xi, \varepsilon) + z(\xi, \varepsilon) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} U(\xi, \varepsilon) \\ V(\xi, \varepsilon) \end{pmatrix}$$

ist analytisch in

$$\bar{D} = \{ (\xi, \eta, \varepsilon) \in \mathbb{C}^3 \mid |\operatorname{Im} \xi| < (r-s^*)-2\delta, |\eta| < s-2s^*, |\varepsilon| < \varepsilon_0 \}$$

und hat reelle Werte für reelle Argumente. Es gilt die Abschätzung

$$|U| + |V| < C^*(M_2 s + M_1) \delta^{-2/\beta}$$

und C^* ist eine nur von β abhängige Konstante. Für die Mittelwerte $[U], [V]$ gilt $[U] = [V] = 0$ und $\Delta A, \Delta b$ genügen den Abschätzungen

$$|\Delta A| < 10 M_1, \quad |\Delta b| < M_2 + 20 M_1/s.$$

Bew.: Wie den Ausführungen zu dem Beweis zu Satz 3.6 zu entnehmen ist, hat man bei der Lösung von (7.4) in der Hauptsache Differenzengleichungen des Typs

$$(7.5) \quad u(\omega + x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon) = h(x, \varepsilon) - [h]$$

mit analytischer Funktion h zu betrachten. Es gilt der zu Satz 3.5 entsprechende

Satz 7.3

Vor.: Die Funktion h aus (7.5) ist 2π -periodisch in ξ , analytisch in $D^* := \{(x, \xi) \in \mathbb{C}^2 \mid |\operatorname{Im} x| < r, |\xi| < \epsilon\}$

und es gilt die Abschätzung $|h(x, \xi)| < M$ für $(x, \xi) \in D^*$;

h ist reell für reelle Argumente und ω erfüllt noch die Ungleichungen in (0.2.2).

Beh.: Die Differenzengleichung (7.5) besitzt eine analytische Lösung in dem Bereich $|\operatorname{Im} x| < r - \delta$, welche noch reell ist für reelle Argumente.

Bew.: h ist 2π -periodisch in x ; also besitzt h die Fourierreihenentwicklung

$$h(x, \xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k(\xi) e^{ikx}$$

und die Koeffizienten h_k hängen holomorph von ξ ab, da h analytisch vorausgesetzt ist. Der Cauchy'sche Integralsatz (siehe [21], § 14) liefert nun die Abschätzung

$$(7.6) \quad |h_k(\xi)| < M e^{-r|k|} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Außerdem besitzt (7.5) die formale Lösung

$$(7.7) \quad u(x, \xi) = \sum_{k \neq 0} \frac{h_k(\xi)}{e^{ik\omega} - 1} e^{ikx}.$$

Es gilt also (7.6) und ω erfüllt die Ungleichungen (0.2.2). Unter diesen Voraussetzungen hat ROBMANN in [20], S. 81-85 nachgewiesen, daß die Reihe

$$\sum_{k \neq 0} \left| \frac{h_k(\xi)}{e^{ik\omega} - 1} \right| e^{|k|(r-\delta)}$$

konvergiert. Das heißt jedoch nichts anderes, als daß $u(x, \xi)$ aus (7.7) eine in D^* analytische Funktion darstellt. Die Realität von u für reelle Argumente ist ebenfalls aus (7.7) ersichtlich, denn h ist reell für reelle Argumente.

Wir kehren zu dem Beweis von Satz 7.2 zurück. Aus dem Beweisgang zu

Satz 3.6 im 3. Abschnitt wird jetzt offensichtlich, daß Satz 7.3 dieselben entscheidenden Dienste zum Nachweis von Satz 7.2 leistet, wie der Satz 3.5 zur Bestätigung von Satz 3.6. Auf eine detaillierte Ausführung dieser Aussage verzichten wir hier, da es praktisch nur eine fast wörtliche Wiedergabe der Beweisführung im 3. Abschnitt darstellen würde.

Wir dürfen also Satz 7.2 voraussetzen und erwarten, daß sich keine wesentlichen Änderungen in den Abschnitten 4,5 bei Einführen des komplexen Parameters ϵ ergeben. Als erstes müssen dort die Bereiche $D(\delta, s)$, $P(\delta, s)$ ersetzt werden durch

$$D(\delta, s, \epsilon_0) := \{ (f, \epsilon) \in \mathbb{C}^3 \mid |\operatorname{Im} f| < r_0/2 + \delta, \quad |z| < s, \quad |\epsilon| < \epsilon_0 \}$$

und

$P(\delta, s, \epsilon_0) \equiv$ Menge aller in $D(\delta, s, \epsilon_0)$ analytischen Funktionen, welche reell sind für reelle Argumente und die Periode 2π in f besitzen.

Die Bedingung "reell analytisch" wird wieder wie oben ersetzt durch "reell für reelle Argumente". Da nun im 4. Abschnitt keine weiteren Realitätsbedingungen auftauchen, können wir die dort gemachten Aussagen insbesondere aber Satz 4.1 unter Beachtung der obigen Änderungen wegen Satz 7.2 übernehmen.

Sehen wir uns z.Bsp. die Behauptung $(i)_0$ von Satz 4.1 an. Für die Startfunktionen

$$K_0 = J, \quad A_0, \quad \mathcal{R}_0 = \begin{pmatrix} \omega_1^* & f \end{pmatrix}$$

ist zu zeigen: $f(K_0, A_0, \mathcal{R}_0) \in P(12\delta_0, 4s_0, \epsilon_0)$ und

$$|f(K_0, A_0, \mathcal{R}_0)| < M_0 \quad \text{für } f \in D(12\delta_0, 4s_0, \epsilon_0).$$

Wegen (2.1) gilt zunächst

$$f(K_0, A_0, \mathcal{R}_0) = A_0 \circ K_0 - K_0 \circ \mathcal{R}_0 = \begin{pmatrix} f(f, y, \epsilon) \\ g(f, y, \epsilon) \end{pmatrix}$$

Aus (7.1), (7.2) folgt dann daraus sofort

$$|\mathbf{f}(K_0, A_0, \mathbf{r}_0)| < \epsilon M_0 \quad \text{für } (\mathbf{f}, \epsilon) \in D(r_0, r_0, \epsilon_0) \stackrel{(4.9)}{\Rightarrow} D(12\delta_0, 4s_0, \epsilon_0)$$

Laut Voraussetzung von Satz 7.1 sind ϵf , ϵg aus $P(r_0, r_0, \epsilon_0)$, was wiederum wegen (4.9) zu $\mathbf{f}(K_0, A_0, \mathbf{r}_0) \in P(12\delta_0, 4s_0, \epsilon_0)$ führt.

Entsprechend lassen sich nun (ii)₀, (iii)₀ von Satz 4.1 nachweisen; man braucht dazu nur der Argumentation in Abschnitt 1.4 zu folgen. Auch die Ausführungen zu dem Induktionsschritt lassen sich ebenfalls fast wörtlich übernehmen, weil Satz 7.2 gilt. Wir versagen uns wieder eine im wesentlichen identische Wiedergabe des 4. Abschnitts.

Wir untersuchen jetzt Abschnitt 5 auf notwendige Änderungen. Die erste Hälfte beschäftigt sich mit der Abschätzung gewisser Restglieder. Diese Abschätzungen bleiben auch nach Einführen des komplexen Parameters ϵ richtig, da sie aufgrund der Induktionsvoraussetzung im 4. Abschnitt unter keinerlei zusätzlichen Realitätsbedingungen durchgeführt werden. Wir erhalten also ohne weiteres

$|\mathbf{f}(K_+, A_+, \mathbf{r}_+) - (K'_+ \cdot \mathbf{r}_+)^{(0)}| < \frac{1}{4} M_+ \quad \text{für } (\mathbf{f}, \epsilon) \in D(12\delta_+, 4s_+, \epsilon_0)$.
Wir schätzen jetzt $(K'_+ \cdot \mathbf{r}_+)^{(0)}$ ab. Dazu geben wir uns feste $\tilde{\eta}, \tilde{\epsilon} \in \mathbb{R}$ mit $-4s_+ < \tilde{\eta} < 4s_+$, $-\epsilon_0 < \tilde{\epsilon} < \epsilon_0$ vor und betrachten die analytische Kurve

$$z = K_+(\mathbf{f}, \tilde{\eta}, \tilde{\epsilon})$$

welche reell ist für reelles $\mathbf{f}$ (siehe Induktionsbehauptung) und die wegen (4.4)₊ geschrieben werden kann in der Form

$$y = \phi_+(\mathbf{f}, \epsilon) = \phi_+(\mathbf{f} + 2\pi, \epsilon)$$

Bekanntlich genügt die Abbildung

$$A_+ = A_0 + \Delta A_1 + \dots + \Delta A_{n+1} = A_0 + \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

der Schnittbedingung. D.h. also, es existieren reelle Winkel

$$\mathbf{f}_0 = \mathbf{f}_0(\tilde{\eta}, \tilde{\epsilon}), \quad \mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_1(\tilde{\eta}, \tilde{\epsilon}), \quad \text{für die gilt}$$

$$(A_+ \circ K_+)(\mathbf{f}_0, \tilde{\eta}, \tilde{\epsilon}) = K_+(\mathbf{f}_1, \tilde{\eta}, \tilde{\epsilon})$$

und wir erhalten wie oben (siehe Seite 73) die Beziehung

$$\{f(K_+, A_+, \alpha_+) - (K' \cdot \alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}\}(\xi_0, \eta, \epsilon) = Q(\eta, \epsilon) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ -h(\eta, \epsilon) \end{pmatrix}$$

Dabei ist gesetzt worden

$$Q(\eta, \epsilon) = \left(\int_0^1 \mathcal{B}_{\xi}^{K_+}(\xi_1 + t(\xi_1 - \xi_2), \eta, \epsilon) dt, \mathcal{B}_{\eta}^K(\omega + \xi_0 + b_n \eta, \eta, \epsilon) \right)$$

mit $\xi_2 := \omega + \xi_0 + b_{n+1} \eta$.

Es bleibt an dieser Stelle festzuhalten, daß im Gegensatz zu Abschnitt 1.5 hier die Werte b_n, b_{n+1} nicht mehr als reell vorausgesetzt werden dürfen. Denn die Funktionen (vgl. (3.6), (3.17)), deren Mittelwerte b_n, b_{n+1} definieren, sind wegen $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$ nicht mehr reell analytisch; das bedeutet, b_n, b_{n+1} müssen nicht mehr reell sein. Wie wir wissen gilt $|b_{n+1}|, |b_n| < 1$ und da weiter nach Voraussetzung

ω, ξ_0, ξ_1 reell sind, haben wir

$$\operatorname{Im} |\xi_1 + t(\xi_1 - \xi_2)| \leq \operatorname{Im} |\xi_2| \leq \operatorname{Im} |b_{n+1} \eta| < 4s_+ \quad , \quad 0 \leq t \leq 1 \quad .$$

$$\operatorname{Im} |\omega + \xi_0 + b_n \eta| \leq \operatorname{Im} |b_n \eta| < 4s_+ \quad .$$

Demnach ist es wieder erlaubt (4.4) bzw. (4.4)₊ für die Abschätzung von $Q(\eta, \epsilon)$ zu verwenden. Wir erhalten

$$\|Q(\eta, \epsilon) - E\| < \frac{1}{2} \quad -4s_+ < \eta < 4s_+ \quad , \quad -\epsilon_0 < \epsilon < \epsilon_0 \quad .$$

Genau dieselben Ausführungen wie auf Seite 74 liefern endlich

$$|f(K_+, A_+, \alpha_+)(\eta, \epsilon)| < M_+ \quad \text{für } (\eta, \epsilon) \in D(12\delta_+, 4s_+, \epsilon_0) \quad .$$

Zusammenfassend dürfen wir feststellen, daß bei holomorpher Abhängigkeit der Ausgangsfunktionen $\mathcal{C}f, \mathcal{C}g$ von einem komplexen Parameter $\mathcal{C}$ jeder Newton - Schritt eine analytische Lösung

$$\Delta K_n = \Delta K_n(\mathcal{C}, \eta, \epsilon) \quad , \quad \Delta a_n = \Delta a_n(\mathcal{C}) \quad , \quad \Delta b_n = \Delta b_n(\mathcal{C})$$

liefert, welche analytisch ist in

$$D_n = \{(\mathcal{C}, \eta, \epsilon) \in \mathcal{C}^3 \mid |\operatorname{Im} \xi_1| < 12\delta_n, |\eta| < 4s_n, |\epsilon| < \epsilon_0\} \quad .$$

Für reelle Argumente besitzen diese Funktionen reelle Werte.

Die Ausführungen des 6. Abschnitts können wir somit wörtlich übernehmen. Demnach konvergieren die Funktionenfolgen

$$\{K_n\} = \{\eta + \Delta K_1 + \dots + \Delta K_n\} \quad , \quad \{A_n\} = \{A_0 + \Delta A_1 + \dots + \Delta A_n\}$$

gleichmäßig. Es ist deshalb möglich, die folgenden Grenzfunktionen zu definieren:

$$K_{\infty}(\xi, 0, \varepsilon) := \lim_{n \rightarrow \infty} K_n(\xi, 0, \varepsilon) ; A_{\infty} := A_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n(\varepsilon) \right)_0 .$$

Da außerdem noch ist: $K_n \in P(12\delta_n, 4s_n, \varepsilon_0)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$, folgt daß die Funktion K_{∞} analytisch ist in dem Bereich

$$D(0, 0, \varepsilon_0) := \{ (\xi, 0, \varepsilon) \in \mathbb{C}^3 \mid |\operatorname{Im} \xi| < r_0/2, |\varepsilon| < \varepsilon_0 \} .$$

Zusätzlich ist K_{∞} reell für reelle Argumente; dies resultiert aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihen K_n , welche für reelle Argumente reelle Werte besitzen.

Da noch mit $\Omega_n = \left(\omega + \xi + \left(\Delta b_1 + \dots + \Delta b_n \right) \cdot \gamma \right)_0$ gilt;

$$A_n \circ K_n = K_n \circ \Omega_n \quad \text{für } (\xi, \eta, \varepsilon) \in D(12\delta_n, 4s_n, \varepsilon_0) ,$$

ist die Gleichung

$$A_{\infty} \circ K_{\infty} = K_{\infty} \circ \Omega \quad \text{mit } \Omega = \left(\omega + \xi \right)$$

in dem Bereich $D(0, 0, \varepsilon_0)$ gültig. Also stellt K_{∞} eine analytische invariante Kurve von A_{∞} mit reellen Werten bei reellen Argumenten dar.

Die Behauptung (iii) von Satz 7.1 wird genauso bewiesen wie (3.9) im 1. Hauptsatz.

Damit schließen wie den Beweis zu Satz 7.1 ab.

1.8 Über die Eindeutigkeit des Parameters a

In diesem abschließenden Abschnitt geht es um die Frage, in wie weit der Parameter a der Abbildung (0.3.6) eindeutig bestimmt ist. Auf diese Problemstellung wird man bereits bei der formalen Lösung aufmerksam. Denn um überhaupt ein eindeutiges Konstruktionsverfahren für die invariante Kurve

$$z = K(f, \varepsilon) = \begin{pmatrix} f + U(f, \varepsilon) \\ V(f, \varepsilon) \end{pmatrix}$$

zu erhalten, ist man auf die Zusatzbedingung

$$(8.1) \quad [U] = [V] = 0$$

angewiesen. Wir stellen uns jetzt vor die Frage: Was passiert, wenn die zusätzliche Forderung (8.1) fallengelassen wird? Wie sieht dann die allgemeine nicht normalisierte Lösung $z = K^*(f, \varepsilon)$, $a^*(\varepsilon)$ aus?

Wir werden für das folgende die Voraussetzungen von Satz 7.1 annehmen und die Eindeutigkeit des Parameters $a(\varepsilon)$ der Abbildung (7.3) beweisen. Es ist dann klar, daß dann daraus die Eindeutigkeit des Parameters a der Abbildung (0.3.6) folgt.

Zunächst überlegt man sich leicht, daß wenn $z = K(f, \varepsilon)$ eine invariante Kurve der Abbildung (7.3) darstellt, die Kurve $\hat{K} := K \circ C$ ebenfalls eine invariante Kurve von (7.3) repräsentiert, falls es sich bei C um eine Abbildung der Gestalt

$$(8.2) \quad C : f' = f + d(\varepsilon)$$

handelt. d ist hier ein beliebiger Parameter, der noch von ε abhängt. Um einzusehen, daß $\hat{K}$ invariant ist, geht man wie folgt vor. Bezeichne wieder $\mathcal{R}$ die lineare Transformation

$$f_1 = \omega + f,$$

so gilt offensichtlich

$$\mathcal{R} \circ C = C \circ \mathcal{R}$$

und da K eine invariante Kurve von (7.3) darstellt, liefert dies

$$A^*(K \circ C) = (K \circ C) \circ \mathcal{A}$$

und $K \circ C$ ist also offensichtlich eine weitere invariante Kurve von (7.3). Es erhebt sich nun sofort die Frage, ob nicht die Umkehrung dieser getroffenen Feststellung gilt. Uns interessiert also, ob nicht eine beliebige invariante Kurve $\hat{K}$ von (7.3) die Gestalt $\hat{K} = K \circ C$ besitzt. Dabei ist C eine Abbildung der Gestalt (8.2) und K stellt die normalisierte Lösung von Satz 7.1 dar. Tatsächlich können wir beweisen

Satz 8.1

Vor.: Gegeben sind die Voraussetzungen von Satz 7.1 und $z = K(\xi, \varepsilon)$ ist die normalisierte invariante Kurve der Abbildung (7.1).

Sei weiter

$$z = K^{\tilde{}}(\xi, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \xi + U^{\tilde{}}(\xi, \varepsilon) \\ V^{\tilde{}}(\xi, \varepsilon) \end{pmatrix}$$

eine zusätzliche beliebige invariante Kurve von (7.3), d.h. es gilt

$$(8.3) \quad \left(A_0 + \begin{pmatrix} a^{\tilde{}}(\varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix} \right) K^{\tilde{}}(\xi, \varepsilon) = K^{\tilde{}}(\omega + \xi, \varepsilon).$$

Beh.: Es existiert eine Transformation C mit

$$(8.4) \quad C : \xi' = \xi + d(\varepsilon)$$

sodaß

$$(8.5) \quad K \circ C = K^{\tilde{}}$$

und

$$(8.6) \quad a^{\tilde{}}(\varepsilon) = a(\varepsilon).$$

Bem.: Wichtig ist also festzuhalten, daß der Parameter $a = a(\varepsilon)$ eindeutig durch die Ausgangsabbildung A_0 bestimmt ist und daß man ihn durch das im ersten Abschnitt beschriebene Konstruktionsverfahren berechnen kann.

Beweis des Satzes 8.1: Die Menge der Abbildungen der Gestalt (8.4) bilden eine Gruppe $\mathcal{C}$ und wir können jedes $C \in \mathcal{C}$ in der

multiplikativen Form

$$C = \text{id} \cdot (\text{id} + \varepsilon c_1) \cdot (\text{id} + \varepsilon^2 c_2) \dots \quad (c_k \in \mathcal{C})$$

darstellen. Wir setzen jetzt

$$C^{(k)} := \text{id} \cdot (\text{id} + \varepsilon c_1) \dots (\text{id} + \varepsilon^k c_k) \quad (k \geq 0)$$

und offensichtlich ist jedes $C^{(k)} \in \mathcal{C}$.

Wir werden die Behauptung des Satzes mit Hilfe der Ordnungsinduktion beweisen. Wir setzen also voraus, daß es für ein $k \geq 1$ ein $C^{(k-1)} \in \mathcal{C}$ gibt, sodaß die Koeffizienten von $1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{k-1}$ in

$$K^* - K \cdot C^{(k-1)}, \quad a^*(\varepsilon) - a(\varepsilon)$$

verschwinden.

Induktionsbehauptung: Es existiert eine Abbildung $C_k \in \mathcal{C}$ mit

$$C_k = \text{id} + \varepsilon^k c_k, \quad (c_k \in \mathcal{C})$$

sodaß die Koeffizienten von $1, \dots, \varepsilon^k$ in

$$K^* - K \cdot C^{(k)}, \quad a^*(\varepsilon) - a(\varepsilon)$$

Null werden.

Bew.: Wir setzen

$$W := K \cdot C^{(k-1)} = \text{id} + \varepsilon W_1 + \dots + \varepsilon^k W_k + \dots,$$

wobei also die W_j bekannte, in § 2 2π -periodische Kurven der Form

$$W_j(\xi) := \begin{pmatrix} w_j^{(1)}(\xi) \\ w_j^{(2)}(\xi) \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

darstellen. Unser Ziel ist es jetzt ein $c_k \in \mathcal{C}$ so zu finden, daß

$$\begin{aligned} K \cdot C^{(k)}(\xi) &= W \cdot (\text{id} + \varepsilon^k c_k)(\xi) = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon W_1(\xi) + \dots + \varepsilon^{k-1} W_{k-1}(\xi) + \\ (8.7) \quad &+ \varepsilon^k (W_k(\xi) + c_k) + \dots \end{aligned}$$

mit K^* übereinstimmt bis zu Gliedern der Ordnung k in ε .

$K^*(\xi, \varepsilon)$ hat die Gestalt (siehe oben)

$$K^*(\xi, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon K_1^*(\xi) + \dots + \varepsilon^k K_k^*(\xi) + \dots$$

mit

$$K_j^*(\xi) = \begin{pmatrix} u_j^*(\xi) \\ v_j^*(\xi) \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

und die u_j^*, v_j^* sind 2π -periodische analytische Funktionen.

Gemäß (1.9) bestimmen sich jetzt die u_k^* , v_k^* aus Gleichungen der Gestalt

$$(8.8) \quad \begin{aligned} u_k^*(\mathfrak{u} + \mathfrak{f}) - u_k^*(\mathfrak{f}) &= F_k^*(\mathfrak{f}) + a_k \\ v_k^*(\mathfrak{u} + \mathfrak{f}) - v_k^*(\mathfrak{f}) &= G_k^*(\mathfrak{f}) \end{aligned}$$

Wir halten weiter fest, daß den Ausführungen zu Beginn dieses Abschnitts entsprechend $K \cdot C^{(k)}$ eine invariante Kurve der Abbildung

$$A = A_0 + \begin{pmatrix} a(\mathfrak{f}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

verkörpert. Demnach müssen sich also die Funktionen $w_k^{(1)}$, $w_k^{(2)}$ aus Gleichungen des Typs

$$(8.9) \quad \begin{aligned} w_k^{(1)}(\mathfrak{u} + \mathfrak{f}') - w_k^{(1)}(\mathfrak{f}') &= \widehat{F}_k(\mathfrak{f}') + a_k \\ w_k^{(2)}(\mathfrak{u} + \mathfrak{f}') - w_k^{(2)}(\mathfrak{f}') &= \widehat{G}_k(\mathfrak{f}') \end{aligned} \quad (\mathfrak{f}' = \mathfrak{f} + c_k)$$

herleiten lassen. Wir betrachten nun die beiden Systeme (8.8) und (8.9) näher. Dabei stellen wir schnell fest, daß aufgrund der Induktionsvoraussetzung gilt

$$(8.10) \quad F_k^* = \widehat{F}_k, \quad G_k^* = \widehat{G}_k$$

Denn die F_k^* , G_k^* (siehe (1.10)) sind durch $A_0, K_1^*, \dots, K_{k-1}^*$ eindeutig bestimmte Funktionen. Wir schreiben dafür

$$F_k^* = \widetilde{F}(A_0, K_1^*, \dots, K_{k-1}^*), \quad G_k^* = \widetilde{G}(A_0, K_1^*, \dots, K_{k-1}^*)$$

und die Funktionen $\widetilde{F}$, $\widetilde{G}$ stammen aus (1.10). Jetzt sagt uns aber die Induktionsvoraussetzung, daß gilt $K_i^* = W_i$ ($i = 1, \dots, k-1$) und da wiederum wegen (1.10) offensichtlich gilt

$$\widehat{F}_k = \widetilde{F}(A_0, W_1, \dots, W_{k-1}), \quad \widehat{G}_k = \widetilde{G}(A_0, W_1, \dots, W_{k-1})$$

ist damit die Richtigkeit von (8.10) erwiesen.

Die erste Folgerung, die wir hieraus ziehen dürfen ist

$a_k^* = a_k$ wenn wir gesetzt haben: $a^*(\mathfrak{f}) = \mathfrak{f} a_1^* + \mathfrak{f}^2 a_2^* + \dots + \mathfrak{f}^k a_k^* + \dots$
 $a(\mathfrak{f}) = \mathfrak{f} a_1 + \mathfrak{f}^2 a_2 + \dots + \mathfrak{f}^k a_k + \dots$
 denn diese Werte bestimmen sich aus der Gleichung (siehe S. 40)

$$(8.1) \quad a_k^* = -[F_k^*] = -[\widehat{F}_k] = a_k$$

Des Weiteren wissen wir aus den Ausführungen des 1. Abschnitts, daß die Systeme (8.8), (8.9) die Reihen u_k^* , v_k^* bzw. $w_k^{(1)}$, $w_k^{(2)}$

bis auf ihre Mittelwerte eindeutig bestimmt sind. Wir wählen c_k so, daß die Gleichung

$$[w_k^{(1)}(\omega + f + c_k)] = [u_k^q(f)]$$

erfüllt ist.

Damit ist die Induktionsbehauptung und auch Satz 8.1 bewiesen.

§ 2 Die isoenergetische Stabilität eines speziellen Hamiltonschen Systems mit dem Freiheitsgrad 2

In diesem Paragraphen werden wir den Hauptsatz von §1 dazu verwenden, die isoenergetische Stabilität der Gleichgewichtslage auf der Energiefläche $h = 0$ nachzuweisen.

Ähnlich wie in dem Beweis zu Satz 2.2 in § 0 werden wir annehmen, die Ruhelage ist nicht stabil. Dann können wir aus den Lösungen des betrachteten Hamilton-Systems eine analytische Abbildung der Gestalt

$$(1) \quad \begin{aligned} x_1 &= \omega + x + f(x, y) \\ y_1 &= y + g(x, y) \end{aligned}$$

ableiten. Erfüllt ω noch die Ungleichungen in (0.2.2), so darf auf (1) der erste Hauptsatz angewendet werden. Wir erhalten dann, daß es einen Parameter a gibt, sodaß die Abbildung

$$(2) \quad \begin{aligned} x_1 &= \omega + x + f(x, y) + a \\ y_1 &= y + g(x, y) \end{aligned}$$

eine invariante Kurve besitzt.

Die Lösung des Hamilton-Systems, welche (1) erzeugt, verläuft auf einer Niveaulfläche $h = \text{const.}$ und unter der Bedingung, daß der Linearteil L die Normalform $\tilde{H}$ der Hamilton-Funktion H teilt, kann nun für den eindeutig bestimmten Parameter a gezeigt werden

$$a = a(h) = h b(h)$$

und b ist eine komplexe Zahl. Setzt man jetzt $h = 0$, so ist also (2) mit (1) identisch und die Abbildung (1) besitzt in diesem Fall eine invariante Kurve. Dies steht, wie gezeigt werden wird, im Widerspruch zu der Annahme, die Gleichgewichtslage ist nicht stabil. Damit ist die isoenergetische Stabilität der Ruhelage auf der Energiefläche $h = 0$ gezeigt.

2.1 Einleitende Betrachtungen

Im folgenden werden alle abkürzenden Bezeichnungen des Abschnitts 0.2 verwendet.

Wir gehen aus von einem reell analytischen Hamilton-System

$$(1.1) \quad \dot{x}_k = H_{y_k}(x,y) \quad , \quad \dot{y}_k = -H_{x_k}(x,y) \quad (k=1,2)$$

und wie die Ausführungen von Abschnitt 0.2 darlegen, kann die Hamiltonfunktion H nach einer vorbereitenden konvergenten kanonischen Transformation in der Form

$$(1.2) \quad H(x,y) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + H_4(w_1, w_2) + \sum_{k=5}^{\infty} H_k(x,y)$$

vorausgesetzt werden und die H_k ($k=4,5,\dots$) sind homogene Polynome vom Grad k in x,y . Unser Ziel ist es zu beweisen:

2. Hauptsatz

Vor.: (i) λ_1, λ_2 rein imaginär. (ii) $\mu < 0$. (iii) $L/\tilde{H}$.

(iv) $\omega := 2\pi\mu$ erfüllt die Ungleichungen in (0.2.2).

Beh.: Die Ruhelage $z=0$ ist auf der Energiefläche $h=0$ stabil.

Bevor wir zu dem Beweis dieses Satzes kommen, sind einige Vorbereitungen notwendig.

Sei ϵ eine beliebig kleine positive Zahl. Dann machen wir die Substitution

$$(1.3) \quad x_k = \epsilon \hat{x}_k \quad , \quad y_k = \epsilon \hat{y}_k \quad (k=1,2) \quad ,$$

welche offenbar nicht kanonisch ist und (1.1) überführt in

$$\dot{\hat{x}}_k = \frac{1}{\epsilon} \dot{x}_k = \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial H}{\partial \hat{y}_k} \quad , \quad \dot{\hat{y}}_k = -\frac{1}{\epsilon} \dot{y}_k = -\frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial H}{\partial \hat{x}_k}$$

Dieses System ist aber wieder kanonisch mit der neuen Hamilton-

Funktion $\frac{1}{\epsilon^2} H \Big|_{\substack{x_k = \epsilon \hat{x}_k \\ y_k = \epsilon \hat{y}_k}} ,$

welche wegen (1.2) die Gestalt

$$(1.4) \quad H^*(x, y, \varepsilon) = L + \varepsilon^2 H_4(w_1, w_2) + \sum_{k=5}^{\infty} \varepsilon^{k-2} H_k(x, y)$$

besitzt, wenn wir wieder anstelle $\hat{x}_k, \hat{y}_k$ ($k=1,2$) x_k, y_k schreiben.

Wir führen einige neue Bezeichnungen ein. Sei

$$\tilde{H} = \tilde{H}(\omega_1, \omega_2) = \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 + \sum_{l=2}^{\infty} \tilde{H}_{2l}(\omega_1, \omega_2)$$

die wegen Voraussetzung (ii) des 2. Hauptsatzes die eindeutig bestimmte formale Normalform der Hamilton-Funktion aus (1.2). Dann verstehen wir unter $H^{(2n)}$ das Polynom

$$H^{(2n)}(w_1, w_2) := L + \sum_{l=2}^n \tilde{H}_{2l}(w_1, w_2)$$

und $\tilde{H}^{(2n)}$ bezeichnet die Funktion

$$\tilde{H}^{(2n)} = \tilde{H}^{(2n)}(w_1, w_2, \varepsilon) := L + \sum_{l=2}^n \varepsilon^{2l-2} \tilde{H}_{2l}(w_1, w_2) .$$

Wegen Lemma 0.2.5 gibt es eine konvergente kanonische Transformation

$z = T_{2s}(\mathfrak{f})$, welche H aus (1.2) überführt in

$$\hat{H}^{(2n)}(\mathfrak{f}, \mathfrak{y}) := H^{(2n)}(\omega_1, \omega_2) + G^{(2n+1)}(\mathfrak{f}, \mathfrak{y})$$

und $G^{(2n+1)}$ ist eine analytische Funktion in $\mathfrak{f}, \mathfrak{y}$, welche mit Gliedern der Ordnung $2n+1$ in $\mathfrak{f}, \mathfrak{y}$ beginnt.

Führen wir jetzt wieder die Substitution

$$(1.5) \quad \mathfrak{f}_k = \varepsilon x_k, \quad \mathfrak{z}_k = \varepsilon y_k \quad (k=1,2)$$

aus, so wird das Hamilton-System

$$(1.6) \quad \dot{\mathfrak{f}}_k = \hat{H}_{\mathfrak{z}_k}^{(2n)}, \quad \dot{\mathfrak{z}}_k = -\hat{H}_{\mathfrak{f}_k}^{(2n)} \quad (k=1,2)$$

transformiert in das neue Hamilton-System

$$(1.7) \quad \dot{x}_k = \tilde{H}_{y_k}^{(2n)}, \quad \dot{y}_k = -\tilde{H}_{x_k}^{(2n)} \quad (k=1,2)$$

mit der Hamilton-Funktion

$$\tilde{H}^{(2n)} = \tilde{H}^{(2n)}(x, y, \varepsilon) := \tilde{H}^{(2n)}(w_1, w_2, \varepsilon) + G^{(2n+1)}(x, y, \varepsilon)$$

und $G^{(2n+1)}$ ist analytisch in x, y und beginnt mit Gliedern in ε der Ordnung $2n-1$. Wir brauchen für später

Lemma 1.1 Gegeben ist die analytische Hamilton-Funktion $\tilde{H}^{(4)}$ aus

(1.4). Dann existiert zu jedem $n \geq 2$ eine konvergente Transformation $z = T_{2n}^*(\mathfrak{f}, \varepsilon)$, welche das Hamilton-System

$$(1.8) \quad \dot{x}_k = \tilde{H}_{y_k}^{(4)} \quad , \quad \dot{y}_k = - \tilde{H}_{x_k}^{(4)} \quad (k = 1, 2)$$

transformiert in (1.7).

Bew.: Sei S die Transformation, welche das System (1.1) überführt in (1.8). Also transformiert S^{-1} (1.8) in (1.1); dieses System wiederum geht vermöge der Substitution $z = T_{2n}(j, \epsilon)$ aus Lemma 0.2.5 über in (1.6); endlich wird das System durch S^* aus (1.5) abgebildet in (1.7). Die gesuchte Transformation $T_{2n}^*(j, \epsilon)$ ist also konvergent und gegeben durch

$$(1.9) \quad z = T_{2n}^*(j, \epsilon) = (S^{-1} \circ T_{2n} \circ S)(j, \epsilon)$$

und wegen (1.3), (0.2.29) und (1.5) gilt noch

$$(1.10) \quad T_{2n}^*(j, \epsilon) = j + \sigma(\epsilon)$$

und $\sigma(\epsilon)$ ist eine konvergente Reihe in j, η, ϵ , welche mit Gliedern der Ordnung 1 in ϵ beginnt. ■

Bem.: a) Ist $\tilde{H}^{(4)}$ analytisch in

$$D_2 := \{ (x, y) \in \mathbb{C}^4 \mid |x| < d_0, |y| < d_0, d_0 > 0 \} \quad ,$$

so ist wegen der Holomorphie von T_{2n}^* und (1.10) die Funktion $\tilde{H}^{(2n)}$ analytisch in

$$D_n := \{ (x, y) \in \mathbb{C}^4 \mid |x| < d_0 - \delta_n, |y| < d_0 - \delta_n \} \quad .$$

$\delta_n = \delta_n(\epsilon)$ hängt von ϵ ab und kann infolge dessen beliebig klein gemacht werden, sodaß gilt $\delta_n \ll d_0$ und sich demnach D_n von D_2 nur wenig unterscheidet.

b) T_{2n}^* ist reell für reelle Argumente. Dies liegt an der Transformation T_{2n} aus (0.2.29), welche nur reelle Koeffizienten besitzt, falls $\tilde{H}^{(4)}$ reell ist (siehe dazu [27], § 30). Jetzt folgt mit a), daß $\tilde{H}^{(2n)}$ in D_n reell analytisch ist, wenn nur $\tilde{H}^{(4)}$ diese Eigenschaft in D_2 aufweist.

Mit Lemma 1.1 läßt sich einfach nachweisen

Lemma 1.2 Sei $Z^{(2)}(t)$ eine Lösung von (1.8) mit

$$(1.11) \quad \tilde{H}^{(4)}(Z^{(2)}(t)) = h = \text{const.}$$

Dann existiert eine Lösung $Z^{(n)}(t)$ von (1.7), für welche gilt

$$(1.12) \quad \tilde{H}^{(2n)}(Z^{(n)}(t)) = h$$

und h stammt aus (1.11).

Bew.: Die konvergente Transformation $T_{2n}^*(f, \epsilon)$ aus (1.10) führt $\epsilon^{\tilde{H}^{(4)}}$ in $\epsilon^{\tilde{H}^{(2n)}}$ über. Äquivalent damit ist, daß die konvergente Abbildung $T_{2n}^{*-1} = z + \dots \epsilon^{\tilde{H}^{(2n)}}$ in $\epsilon^{\tilde{H}^{(4)}}$ transformiert.

Aus der Theorie für gewöhnliche Differentialgleichungen wissen wir, daß die Lösung $Z^{(2)}$ von (1.8) dann eine Lösung

$$(1.13) \quad Z^{(n)}(t) := T_{2n}^{*-1}(Z^{(2)}(t)) \stackrel{(1.10)}{=} Z^{(2)}(t) + \dots$$

für das System (1.7) liefert.

Es gilt

$$\epsilon^{\tilde{H}^{(2n)}}(f, \epsilon) \Big|_{f=Z^{(n)}(t)} = \epsilon^{\tilde{H}^{(4)}}(T_{2n}^*(f, \epsilon), \epsilon) \Big|_{f=Z^{(n)}(t)} \quad (1.13)$$

$$\epsilon^{\tilde{H}^{(4)}}(T_{2n}^*(T_{2n}^{*-1}(Z^{(2)}(t)), \epsilon) = \epsilon^{\tilde{H}^{(4)}}(Z^{(2)}(t)) \stackrel{(1.11)}{=} \epsilon^{\tilde{H}^{(4)}} h$$

Also folgt daraus

$$\tilde{H}^{(2n)}(Z^{(n)}(t)) = h$$

und das Lemma ist bewiesen. ■

2.2 Die Bedingung $L/\tilde{H}$ und ihre Auswirkung

Ein Vergleich der Voraussetzungen von Satz 2.2 und dem 2. Hauptsatz liefert nur den folgenden Unterschied. Bei Satz 2.2 teilt der Linearteil L die Normalform $\tilde{H}$ nicht, wohingegen die Bedingung (iv) des 2. Hauptsatzes besagt: $L/\tilde{H}$. Es wird deshalb wichtig sein, im Verlaufe dieses Abschnitts zu untersuchen, wie sich die Eigenschaft $L/\tilde{H}$ auf gewisse Abbildungen und Funktionen auswirkt.

Als erstes halten wir die offensichtliche Tatsache fest, daß wenn $L/\tilde{H}$ auch gilt: $L/\tilde{H}^{(2n)}$ für $n \geq 2$.

Wir beweisen jetzt den für später sehr wichtigen Satz

Satz 2.1

Vor.: a) Gegeben ist die formale Hamilton-Funktion $\tilde{H}^*$ der Gestalt

$$(2.1) \quad \tilde{H}^*(w_1, w_2) = L + \sum_{l=2}^{\infty} \varepsilon^{2(l-1)} \tilde{H}_{2l}^*(w_1, w_2)$$

und die $\tilde{H}_{2l}^*$ sind homogene Polynome vom Grad $2l$ in w_1, w_2 .

b) Der Linearteil L teilt die Normalform $\tilde{H}^*$.

c) $w_2 = w_2(w_1, h, \varepsilon)$ ist eine formale Auflösung der Gleichung

$$(2.2) \quad \tilde{H}^*(w_1, w_2, \varepsilon) = h = \text{const.}$$

nach w_2 .

Beh.: Für den Quotienten $\tilde{H}_{w_1}^* / \tilde{H}_{w_2}^*$ gilt

$$(2.3) \quad Q := \left. \frac{\tilde{H}_{w_1}^*}{\tilde{H}_{w_2}^*} \right|_{w_2=w_2(w_1, h, \varepsilon)} = \lambda_1 / \lambda_2 + hP(w_1, h, \varepsilon)$$

und P ist eine formale Potenzreihe in w_1, h, ε .

Bew.: Als erstes halten wir fest, daß wegen

$$\left. \frac{\partial \tilde{H}^*}{\partial w_2} \right|_{w_2=0} = \lambda_2 \neq 0$$

stets eine formale Auflösung der Gleichung (2.2) nach w_2 existiert; es gilt in diesem speziellen Fall noch

$$(2.4) \quad w_2 = \frac{1}{\lambda_2} (h - \lambda_1 w_1) + O(\varepsilon^2)$$

Dabei steht hier wie auch im weiteren Verlauf dieses Beweises $\mathcal{O}(\varepsilon^k)$ ($k \in \mathbb{N}$) an Stelle einer formalen Potenzreihe in w_1, h, ε , deren Glieder mindestens die Ordnung k in ε haben.

Weiter bemerken wir, daß $\tilde{H}^*$ nur Glieder von gerader Ordnung in ε besitzt; demnach ist der Beweis dieses Satzes erbracht, wenn wir für $i = 2n$ ($n \in \mathbb{N}$) zeigen:

$$(2.5) \quad Q := \tilde{H}_{w_1}^* / \tilde{H}_{w_2}^* = h p^{(i)}(w_1, h, \varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^{i+2})$$

und die $p^{(i)}$ sind Polynome in den Variablen w_1, h, ε mit dem Höchstgrad i in ε . Wir beweisen (2.5) induktiv.

Induktionsanfang: Sei $i = 2$. Wir setzen

$$H_4(w_1, w_2) = h_0 w_1^2 + h_1 w_1 w_2 + h_2 w_2^2$$

und erhalten aus (0.2.46) für den Quotienten Q :

$$Q = \tilde{H}_{w_1}^* / \tilde{H}_{w_2}^* = \lambda_1 / \lambda_2 + \frac{\varepsilon^2}{\lambda_2^2} \{ D w_1 + h(h_1 \lambda_2 - h_2 \lambda_1) \} + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$$

Dabei ist D in (0.2.33) festgelegt durch

$$D = h_0 \lambda_1^2 - 2h_1 \lambda_1 \lambda_2 + h_2 \lambda_2^2$$

Unter Beachtung von Lemma 0.2.6 ist wegen der Bedingung $L/\tilde{H} \quad D = 0$, woraus wir folgern

$$Q^* := \tilde{H}_{w_1}^* / \tilde{H}_{w_2}^* - \text{---} = h p^{(2)}(w_1, h, \varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$$

und $p^{(2)}$ ist gegeben durch

$$p^{(2)}(w_1, h, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{\lambda_2^2} (h_1 \lambda_2 - h_2 \lambda_1)$$

Induktionsvoraussetzung: $Q - \text{---} = h p^{(i)}(w_1, h, \varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^{i+2})$

gilt für ein $i \gg 2$, i gerade.

Induktionsbehauptung: $Q - \text{---} = h p^{*(i+2)}(w_1, h, \varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^{i+4})$ und es

gilt $p^{*(i+2)} = h p^{(i+2)}$.

Bew.: Wegen der Induktionsvoraussetzung enthält das Polynom $p^{(i)}$ alle möglichen Terme der Form $a(w_1, h) \varepsilon^j$ mit $2 \leq j \leq i$ in $Q - \text{---}$. Demnach können also bei der Bestimmung von $p^{*(i+2)}$ keine neuen, zusätzliche Terme in ε^j mit $2 \leq j \leq i$ entstehen. Deshalb dürfen wir ansetzen

$$(2.6) \quad p^{*(i+2)} = h p^{(i)} + \varepsilon^{i+2} R(w_1, h)$$

und R ist ein Polynom in w_1, h . Angenommen, es existiert ein Glied in R in w_1 allein. Dies hat dann beispielsweise die Gestalt aw_1^k ($k \in \mathbb{N}$). Wir zeigen, daß der Koeffizient a Null sein muß.

Zunächst: Weil $L \tilde{H}^*$ teilt, können wir schreiben $\tilde{H}^* = L(1 + G)$ und für die Reihe G in w_1, h, ε gilt noch $G = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

Also muß nun im Falle $H = h = 0$ notwendig gelten: $L = 0$; daraus schließen wir

$$(2.7) \quad \left. \tilde{H}_{w_1}^* / \tilde{H}_{w_2}^* \right|_{h=0} = (\lambda_1 + LG_{w_1}) / (\lambda_2 + LG_{w_2}) \Big|_{h=0} = \mu = \text{const.}$$

Auf der anderen Seite haben wir wegen (2.6), der Induktionsvoraussetzung und der Annahme über R folgende Gleichung

$$\left. \tilde{H}_{w_1}^* / \tilde{H}_{w_2}^* \right|_{h=0} = \mu + aw_1^k \varepsilon^{i+2} + \mathcal{O}(\varepsilon^{i+4})$$

Es erzwingt jetzt (2.7) die Bedingung

$$aw_1^k + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0$$

und dies impliziert $a = 0$. Folglich ist jeder Koeffizient eines Produkts in R in w_1 allein Null und wir können schreiben

$R(w_1, h) = h R^*(w_1, h)$. Die Induktionsbehauptung ist damit wegen (2.6) bewiesen und wir sind mit dem Satz 2.1 fertig.

Bem.: Für später ist noch festzuhalten, daß die Reihe P aus (2.3) mit Gliedern der Ordnung 2 in ε beginnt. Dies ist unmittelbar aus dem Induktionsanfang ersichtlich.

Interessant ist jetzt, daß eine Art Umkehrung von Satz 2.1 existiert.

Satz 2.2

Vor.: a) Gegeben ist die formale Reihe $\tilde{H}^*$ aus (2.1).

b) $w_2 = w_2(w_1, h, \varepsilon)$ ist die formale Auflösung der Gleichung (2.2) nach w_2 .

c) Der Quotient $Q = \tilde{H}_{w_1}^* / \tilde{H}_{w_2}^*$ hat die Gestalt wie Q aus (2.3).

Beh.: L teilt $\tilde{H}$.

Bew.: Wegen Voraussetzung c) gilt

$$Q = \lambda_1/\lambda_2 + h P(w_1, h, \epsilon)$$

und P ist eine formale Potenzreihe in den Variablen w_1, h, ϵ .

Aus der letzten Gleichung schließen wir sofort, daß für $\tilde{H}^* = h = 0$

sein muß: $Q = \mu = \text{const.}$ Das bedeutet insbesondere, daß keine

Terme in w_1 allein in dem Quotienten $\tilde{H}_{w_1}^*/\tilde{H}_{w_2}^*$ auftauchen dürfen.

Deshalb ist der Satz bewiesen, wenn wir zeigen: L teilt nicht $\tilde{H}^*$,

dann ist Q nicht konstant entlang der Fläche $\tilde{H}^* = h = 0$.

Wir nehmen also an, daß L die Polynome $\tilde{H}_{21}$ ($1 = 2, \dots, n-1$) teilt, aber $L \nmid \tilde{H}_{2n}$. Demnach können wir schreiben

$$\tilde{H}^{(2n)}(w_1, w_2, \epsilon) = L \cdot F + \epsilon^{2n-2} \tilde{H}_{2n}$$

und F ist ein Polynom, für das noch gilt $F = 1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$. Weiter

läßt sich $\tilde{H}_{2n}$ in der Form

$$(2.8) \quad \tilde{H}_{2n} = \sum_{k=0}^n a_k L^{n-k} w_1^k$$

darstellen. Hier sind die a_k Koeffizienten, welche sich durch Koeffizientenvergleich aus der Gleichung

$$\tilde{H}_{2n} = \sum_{k=0}^n b_k w_1^k w_2^{n-k}$$

mit bekannten b_k bestimmen lassen. Weil $L \nmid \tilde{H}_{2n}$ vorausgesetzt war, gilt nun noch insbesondere

$$a_n \neq 0.$$

Wir betrachten jetzt den Quotienten $\tilde{Q} := \tilde{H}_{w_1}^{(2n)} / \tilde{H}_{w_2}^{(2n)}$ entlang der Niveaufläche $\tilde{H}^{(2n)} = 0$. Wegen $\tilde{H}^{(2n)} = L(1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)) + \mathcal{O}(\epsilon^{2n-2})$, folgt zunächst aus $\tilde{H}^{(2n)} = 0$, daß in dem Fall $L = 0$ gelten muß.

Wir erhalten deshalb

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= \frac{\tilde{H}_{w_1}^*}{\tilde{H}_{w_2}^*} \Big|_{\tilde{H}^{(2n)}=0} = \frac{L_{w_1} F + L F_{w_1} + \epsilon^{2n-2} (\tilde{H}_{2n})_{w_1}}{L_{w_2} F + L F_{w_2} + \epsilon^{2n-2} (\tilde{H}_{2n})_{w_2}} \Big|_{\tilde{H}^{(2n)}=0} = \\ &= \frac{\lambda_1 F + \epsilon^{2n-2} a_n w_1^{n-1}}{\lambda_2 F} = \frac{\lambda_1 F + \epsilon^{2n-2} a_n w_1^{n-1}}{\lambda_2 (1 + \mathcal{O}(\epsilon^2))}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Daraus ergibt sich für $\tilde{Q}$ im Falle $\tilde{H}^{(2n)} = 0$:

$$(2.9) \quad \tilde{Q} = \lambda_1/\lambda_2 + \epsilon^{2n-2} a_n n w_1^{n-1} + \sigma(\epsilon^{2n})$$

und $\sigma(\epsilon^{2n})$ ist eine analytische Funktion, welche mit Gliedern in ϵ der Ordnung $2n$ beginnt.

Weil nun noch gilt

$$Q = \frac{\overset{*}{H}_{w_1}(2n) + \sigma(\epsilon^{2n})}{\overset{*}{H}_{w_2}(2n) + \sigma(\epsilon^{2n})} = \overset{*}{H}_{w_1}(2n)/\overset{*}{H}_{w_2}(2n) + \sigma(\epsilon^{2n}),$$

erhalten wir also unter Beachtung von (2.9)

$$Q|_{\tilde{H}^* = h=0} = \lambda_1/\lambda_2 + \epsilon^{2n-2} a_n n w_1^{n-1} + \sigma(\epsilon^{2n}).$$

Da wegen oben $a_n \neq 0$ ist, folgt aus der letzten Gleichung, daß Q entlang der Fläche $\tilde{H}^* = 0$ nicht konstant ist und der Satz ist bewiesen. ■

In Abschnitt 0.2 sahen wir, daß die Bedingung $L \neq H^{(4)}$ maßgeblich dafür verantwortlich war, daß die Abbildung (0.2.43) in der Form

$$x_1 = u + x + y + f(x, y, \epsilon), \quad y_1 = y + g(x, y, \epsilon)$$

geschrieben werden konnte. Wir stellen uns jetzt vor die Frage, wie sich die Gestalt der letzten Abbildung ändert, wenn wir die Kondition $L \neq H^{(4)}$ durch $L/H^{(4)}$ ersetzen. Mit Hilfe des vorletzten Satzes gelingt es uns allgemein zu zeigen

Satz 2.3

Vor.: a) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Gegeben ist die reell analytische Abbildung der Gestalt

$$(2.10) \quad \begin{cases} x_1(T) = x_1(0) e^{iQ}, & y_1(T) = \overline{ix_1(0)} e^{-iQ} \\ Q = 2\pi \overset{*}{H}_{w_1}(2n)/\overset{*}{H}_{w_2}(2n), & T = 2\pi i/\overset{*}{H}_{w_2}(2n) \end{cases}$$

b) Der Linearteil L teilt $\overset{*}{H}(2n)$.

Beh.: Die Abbildung (2.10) läßt sich in der Form schreiben

$$(2.11) \quad \begin{aligned} x_1 &= u + x + hf(x, y, \epsilon) \\ y_1 &= y + hg(x, y, \epsilon) \end{aligned}$$

und die hf, hg sind reell analytische Funktionen in x, y und 2π -periodisch in x .

Bew.: Bezeichnet wieder $w_2 = w_2(w_1, h, \varepsilon)$ die Auflösung der Gleichung

$$H^{(2n)}(w_1, w_2, \varepsilon) = h$$

nach w_2 . Diese Auflösung ist analytisch, wie die Ausführungen des Abschnitts 0.2 (siehe Seite 18) zeigen. Wegen Voraussetzung b) des Satzes folgt nun aus (2.3) des Satzes 2.1 die wichtige Relation

$$Q = 2\pi \frac{H^{(2n)}_{w_1}}{H^{(2n)}_{w_2}} = 2\pi \mu + h P(w_1, h, \varepsilon).$$

P ist eine analytische Funktion, denn der Nenner $H^{(2n)}_{w_2}$ bleibt wegen $H^{(2n)}_{w_2} = 1_2 + O(\varepsilon^2)$ von Null weg beschränkt; $O(\varepsilon^2)$ ist hier ein Polynom in ε , welches mit Gliedern der Ordnung 2 beginnt.

Wir definieren nun den Winkel φ durch $x_1(0) = |x_1(0)| e^{i\varphi}$ und führen die Polarkoordinaten $\varphi, r := |x_1(0)|$ ein. Gelten jetzt noch die Realitätsbedingungen, so ist (vgl. Seite 28) $w_1 = x_1(0) \overline{i x_1(0)}$ und die Abbildung (2.10) können wir identifizieren mit

$$r_1 e^{i\varphi_1} := x_1(T) = r e^{i\varphi} + i 2\pi \mu + h P(ir^2, h, \varepsilon).$$

Dies ergibt nach Trennung von Real- und Imaginärteil die Gleichungen

$$\varphi_1 = \omega + \varphi + h f(r, h, \varepsilon)$$

$$r_1 = r + h g(r, h, \varepsilon)$$

Dabei ist noch $\omega := 2\pi \mu$ gesetzt worden.

Ersetzen wir wieder φ durch x, r durch y , so ergibt sich also, daß (2.11) (2.10) entspricht. Die Funktionen hf, hg sind reell analytisch, weil (2.10) reell analytisch ist. Die 2π -Periodizität ergibt sich trivial aus der Tatsache, daß der Winkel φ bzw. x gar nicht in hf, hg erscheint.

Bem.: Wie man aus der Bemerkung zu Satz 2.1 leicht schließt, läßt sich aus f, g ε^2 ausklammern.

Wir sind nun mit den Vorbereitungen fertig und können jetzt den eigentlichen Beweis von dem 2. Hauptsatz in Angriff nehmen.

2.3 Der Beweis des 2. Hauptsatzes

Die Konzeption des Beweises des 2. Hauptsatzes entspricht im wesentlichen der des Beweises von Satz 2.2 in Abschnitt 0.2 .

Wir gehen aus von einer reell analytischen Hamilton-Funktion H in der Form

$$\hat{H}^{(4)}(x,y) = H^{(4)}(w_1, w_2) + \sum_{k=5}^{\infty} H_k(x,y)$$

und die H_k ($k = 5, 6, \dots$) sind homogene Polynome vom Grad k in x, y .

Um die Überlegungen einfacher zu gestalten, führen wir die Substitution

$$(3.1) \quad x_k \longrightarrow \epsilon^{-1} x_k, \quad y_k \longrightarrow \epsilon^{-1} y_k \quad (k = 1, 2)$$

durch und ϵ ist hier ein beliebig kleiner positiver Parameter. Wie bereits oben schon einmal dargestellt (siehe Seite 14), ist es vermöge (3.1) möglich, die Hamilton-Funktion in der Gestalt

$$(3.2) \quad \hat{H}^{(4)}(x,y,\epsilon) = L + \epsilon^2 H_4(w_1, w_2) + \sum_{k=5}^{\infty} \epsilon^{k-2} H_k(x,y)$$

vorauszusetzen. Die Ausführungen des Abschnitts 0.2 auf den Seiten 13,14 liefern jetzt zunächst einmal

Lemma 3.1 Wir nehmen an, die Ruhelage des Hamilton-Systems

$$(3.3) \quad \dot{x}_k = \tilde{H}_{y_k}^{(4)}, \quad \dot{y}_k = -\tilde{H}_{x_k}^{(4)} \quad (k = 1, 2)$$

ist nicht stabil. Sei weiter

$$(3.4) \quad Z(t) := (x_1(t), x_2(t), \overline{ix_1(t)}, \overline{ix_2(t)})$$

eine den Realitätsbedingungen gehorchende Lösung von (3.3) mit den Anfangswerten $x_1(0), \dots, \overline{ix_2(0)}$ und es gelte

$$(3.5) \quad |x_1(0)|^2 + |x_2(0)|^2 < 1 .$$

Dann existiert ein $t_0 \in \mathbb{R}$, sodaß

$$(3.6) \quad |x_1(t_0)|^2 + |x_2(t_0)|^2 = c^2 \quad \text{mit} \quad c = 3\sqrt{\mu} .$$

O.B.d.A. kann $t_0 > 0$ angenommen werden.

Wegen (3.5), (3.6) läßt sich nun genau wie in Abschnitt 0.2 beweisen (Vgl. dazu Lemma 0.2.1):

Lemma 3.2 Sei $Z(t)$ die Lösung (3.4) aus Lemma 3.1. Dann durchläuft die Funktion $|x_1(t)|^2$ während der Zeit $0 \leq t \leq t_0$ alle Werte des Intervalls $[2, 3]$.

Es ist bekannt, daß $\tilde{H}^{(4)}$ entlang der Lösung $Z(t)$ aus (3.4) konstant ist. Gelte also

$$(3.7) \quad \tilde{H}^{(4)}(Z(t)) = h$$

für ein festes h . Unter Beachtung von Lemma 3.2 ist es dann möglich, die 3-dimensionale Mannigfaltigkeit

$$\mathcal{R}^{(2)} = \{ z \in \mathbb{C}^4 \mid \tilde{H}^{(4)}(Z(t)) = h, y_k = i\bar{x}_k, 2 \leq |x_1|^2 \leq 3 \}$$

zu definieren und auf ihr die reelle Fläche

$$\Sigma^{(2)} := \{ z \in \mathcal{R} \mid \operatorname{Im} \ln x_2 = 0 \pmod{2\pi} \}$$

festzulegen. Es ist $\Sigma^{(2)}$ eine wohldefinierte Menge, denn wie der Beweis zu Teil (i) des Lemmas 0.2.2 zeigt, ist $\Sigma^{(2)}$ nach oben wie nach unten beschränkt. Wir betrachten nun die reelle Abbildung $\tilde{S}^{(2)}$, welche gegeben ist durch die Vorschrift

$$(3.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Zum Zeitpunkt } t_1 \text{ treffe die reelle Lösung } Z(t) \text{ aus (3.4)} \\ \text{die Fläche } \Sigma^{(2)} \text{ in dem Punkt } P_1. \text{ Mit wachsendem } t \text{ folgen wir} \\ \text{der Lösung } Z(t), \text{ bis sie wieder } \Sigma^{(2)} \text{ in einem 2. Punkt} \\ P_2 \text{ schneidet. Wir definieren dann die Abbildung } \tilde{S}^{(2)} \text{ durch} \\ \tilde{S}^{(2)}(P_1) = P_2. \end{array} \right.$$

Wie aus dem Abschnitt 0.2 zu ersehen ist, umfaßt der Definitionsbereich von $\tilde{S}^{(2)}$ die Menge

$$\Sigma^{*(2)} := \{ z \in \Sigma^{(2)} \mid 2 + \delta \leq |x_1|^2 \leq 3 - \delta, 0 < \delta < \frac{1}{3} \}.$$

Wie weiter aus Lemma 0.2.3 zu entnehmen ist, können die Flächen

$\Sigma^{(2)}$, $\Sigma^{*(2)}$ zu komplexen Gebieten $\Sigma_c^{(2)}$, $\Sigma_c^{*(2)}$ ausgedehnt werden

Die komplexe Erweiterung $S^{(2)}$ von $\tilde{S}^{(2)}$ wird jetzt dadurch vollzogen, indem wir entsprechend (3.8) einer komplexen Lösung (3.4)

von $\Sigma_{\epsilon}^{(2)}$ aus folgen, bis sie wieder $\Sigma_{\epsilon}^{(2)}$ in einem weiteren Punkt schneidet.

Bezeichne im folgenden $G^{(m)}(x, y, \epsilon)$ eine konvergente Potenzreihe in x, y , welche mit Gliedern der Ordnung m in ϵ beginnt. Außerdem verstehen wir unter $\mathcal{O}(\epsilon^k)$ eine analytische Funktion in x, y , welche Glieder in ϵ von mindestens der Ordnung k besitzt.

Wir sind jetzt in der Lage, entsprechend Lemma 0.2.2 zu zeigen:

Satz 3.1

Vor.: a) Gegeben ist die in $D_2 := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x| < d_0, |y| < d_0\}$ reell analytische Hamilton-Funktion $\tilde{H}^{(4)}$.

b) Die Ruhelage von (3.3) ist nicht stabil.

c) $Z^{(2)}(t) := Z(t)$ ist eine Lösung (3.4) und erfüllt die Bedingungen (3.5), (3.6), (3.7).

d) L teilt die Normalform von $\hat{H}^{(4)}$.

Beh.: Die Lösung $Z^{(2)}(t)$ definiert eine Funktion $S^{(2)}$ mit folgenden Eigenschaften

- (i) $S^{(2)} : \tilde{\Sigma}_{\epsilon}^{(2)} \rightarrow \Sigma_{\epsilon}^{(2)}$ ist reell analytisch in $\tilde{\Sigma}_{\epsilon}^{(2)}$.
- (ii) $S^{(2)}$ ist inhaltstreu und erfüllt somit die Schnittbedingung.

(iii) $S^{(2)}$ kann geschrieben werden in der Form

$$x_1 = \omega + x + f^{(2)}(x, y, \epsilon)$$

$$y_1 = y + g^{(2)}(x, y, \epsilon)$$

(3.9) und die $f^{(2)}, g^{(2)}$ sind reell analytische Funktionen in D_2 und haben die Periode 2π in x .

(iv) Die $f^{(2)}, g^{(2)}$ haben die Gestalt

$$f^{(2)}(x, y, \epsilon) = h p_1^{(2n-2)}(x, y, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^{2n-1})$$

$$g^{(2)}(x, y, \epsilon) = h p_2^{(2n-2)}(x, y, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^{2n-1}) \quad (n = 2)$$

und die $p_i^{(2n-2)}$ ($i=1,2$) sind Polynome in x, y mit dem Höchstgrad $2n - 2$ in ϵ .

Bew.: Zum Beweis betrachten wir Lemma 0.2.2, welches unter den obigen Voraussetzungen a) - c) und der Bedingung

d) L teilt nicht das Polynom $\tilde{H}^{(4)}(w_1, w_2)$

bewiesen wurde. Beim Nachweis von (0.2.15) (i), (ii) ist aber die letzte Voraussetzung d) gar nicht in Erscheinung getreten, sodaß also (3.9) (i), (ii) direkt aus (0.2.15) (i), (ii) folgen. Dadurch bleibt nur noch (3.9) (iii), (iv) zu zeigen.

Um eine geeignete Näherung S^* für $S^{(2)}$ zu erhalten, betrachten wir wieder wie in Abschnitt 0.2 das Hamilton-System

$$(3.10) \quad \dot{x}_k = \tilde{H}_{w_k}^{(4)} x_k, \quad \dot{y}_k = -\tilde{H}_{w_k}^{(4)} y_k \quad (k = 1, 2)$$

Die zu $\Sigma_c^{(2)}$, $\tilde{\Sigma}_c^{(2)}$ entsprechenden Flächen werden mit Σ_c , $\tilde{\Sigma}_c$ bezeichnet. Analog zu (3.8) definieren wir S^* dadurch, indem wir ausgehend von einem Punkt $P \in \tilde{\Sigma}_c$ einer Lösung von (3.10) mit wachsendem t solange folgen, bis sie Σ_c in einem 2. Punkt P^* wieder trifft. Nun ergeben die Ausführungen auf den Seiten 26, 27, daß $S^*: \tilde{\Sigma}_c \rightarrow \Sigma_c$ dargestellt werden kann durch eine Abbildung mit der Gestalt

$$(3.11) \quad x_1(T) = x_1(0) e^{iQ}, \quad y_1(T) = \overline{ix_1(0)} e^{-iQ}.$$

Dabei sind T, Q gegeben durch (vgl. 0.2.39), (0.2.40))

$$(3.12) \quad T = 2\pi i / \tilde{H}_{w_2}^{(4)}, \quad Q = 2\pi \tilde{H}_{w_1}^{(4)} / \tilde{H}_{w_2}^{(4)}.$$

Wegen Satz 2.3, (2.11) hat S^* aufgrund von (3.11), (3.12) die Form

$$(3.13) \quad x_1 = \omega + x + h f^*(x, y, h, \epsilon), \quad y_1 = y + h g^*(x, y, h, \epsilon).$$

Aus der Bemerkung zu Satz 2.3 schließen wir noch, daß f^*, g^* geschrieben werden können in der Gestalt

$$h f^*(x, y, h, \epsilon) = \epsilon^2 h p_1^{(2)}(x, y, h) + \sigma(\epsilon^3)$$

$$h g^*(x, y, h, \epsilon) = \epsilon^2 h p_2^{(2)}(x, y, h) + \sigma(\epsilon^3)$$

und die $p_1^{(2)}, p_2^{(2)}$ sind Polynome in x, y, h .

Weil nun $s^{(2)}$ aus reell analytischen Lösungen von

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \dot{x}_k &= \tilde{H}_{y_k}^{(2n)} = H_{y_k}^{(2n)} x_k + \sigma(\epsilon^{2n-1}) \\ \dot{y}_k &= -\tilde{H}_{x_k}^{(2n)} = -H_{x_k}^{(2n)} y_k + \sigma(\epsilon^{2n-1}) \end{aligned} \quad (n=2)$$

definiert wird, sind die jetzt anzustellenden Überlegungen für $s^{(2)}$ mit den Ausführungen zu s^* identisch bis zu Gliedern der Ordnung 2 in ϵ . Aus (3.13) folgt damit die Richtigkeit von (3.9) (iii), (iv), ■

Wie man leicht erkennt, liegt mit $s^{(2)}$ eine Abbildung vor, auf die man den ersten Hauptsatz anwenden kann. Es gilt

Lemma 3.3 Gegeben ist die Abbildung $s^{(2)}$ aus Satz 3.1. $s^{(2)}$

hat die Gestalt (3.9) (iii) und ω erfüllt die Ungleichungen von (0.2.2). Dann besitzt $s^{(2)}$ einen eindeutig bestimmten Parameter $a^{(2)} = a^{(2)}(\epsilon, h)$, sodaß die Abbildung

$$(3.15) \quad \hat{s}^{(2)} := s^{(2)} + \begin{pmatrix} a^{(2)}(\epsilon, h) \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine invariante Kurve besitzt. Außerdem läßt sich $a^{(2)}$ in der Form schreiben

$$(3.16) \quad a^{(2)}(\epsilon, h) = h A^{(2)}(\epsilon, h) + \sigma(\epsilon^3)$$

und $A^{(2)}$ ist ein Polynom in ϵ, h mit dem Höchstgrad 2 in ϵ .

Bew.: $s^{(2)}$ hat die Gestalt

$$x_1 = \omega + x + f^{(2)}(x, y, h, \epsilon), \quad y_1 = y + g^{(2)}(x, y, h, \epsilon)$$

und weil noch gilt (siehe Bemerkung im Anschluß an Satz 2.3!)

$$(3.17) \quad f^{(2)} = \sigma(\epsilon^2), \quad g^{(2)} = \sigma(\epsilon^2),$$

kann folglich die Betragssumme

$$|f^{(2)}(x, y, h, \epsilon)| + |g^{(2)}(x, y, h, \epsilon)|$$

genügend klein gemacht werden. Insgesamt wird mit Satz 3.1 klar, daß $s^{(2)}$ alle Voraussetzungen des 1. Hauptsatzes erfüllt. Deshalb existiert also ein eindeutig bestimmter Parameter $a^{(2)}$, sodaß

$\mathfrak{Z}^{(2)}$ aus (3.15) eine invariante Kurve besitzt. Wir weisen (3.16) nach, $a^{(2)}$ ist eine feste komplexe Zahl, die von den Konstanten h , ϵ abhängt und folglich die Potenzreihenentwicklung

$$a^{(2)}(\epsilon, h) = a_0(h) + a_1(h)\epsilon + a_2(h)\epsilon^2 + a_3(h)\epsilon^3 + \dots$$

nach ϵ hat. In Abschnitt 1.1 haben wir herausgefunden (siehe S. 40):

$$a_n(h) = -[F_n] \quad \text{mit} \quad F_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} f_k(x+\tilde{u}, \tilde{v}) \epsilon^k \right)_n + f_n(x, 0).$$

Dabei stammen die f_k aus der folgenden Darstellung für $f^{(2)}(x, y, \epsilon)$:

$$f^{(2)}(x, y, h, \epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x, y, h) \epsilon^k.$$

Weil nun wegen (3.17) $f_0 = f_1 = 0$ ist, folgt zunächst einmal aus dem obigen: $a_0(h) = a_1(h) = 0$. Unter Beachtung von (3.9)(iv) erhalten wir für $a_2(h)$ die Gleichung

$$a_2(h) = -[F_2] = [h p_1^{(2)}(x, y, h)] = h [p_1^{(2)}(x, y, h)].$$

Die letzte Gleichung trifft zu, da sich bei der Mittelwertbildung der konstante Faktor h ausklammern läßt. Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Bem.: Es ist nun nicht klar, ob bei der obigen Entwicklung von $a^{(2)}$ der Faktor h bei den Koeffizienten $a_3(h), a_4(h), \dots$ ebenfalls ausgeklammert werden darf. Um dies entscheiden zu können, müßte man die Funktionen $f^{(2)}, g^{(2)}$ aus (3.9)(iii) explizit vorliegen haben.

Dies ist aber i.a. nicht möglich, da man die Lösung $z^{(2)}(t)$ des Systems (3.3) nicht in ihrer vollständigen Form kennt. Wie jedoch in Abschnitt 0.3 dargelegt wurde, muß die Formel (0.3.10) hergeleitet werden, soll der 2 Hauptsatz bewiesen werden.

Da uns die Lösung von (3.10) in die Lage versetzt, $a^{(2)}$ wenigstens bis zu Gliedern der Ordnung 2 in ϵ festzulegen, ist es nahelegend, ein zu (3.10) verwandtes Hamilton-System zu betrachten, dessen Lösung aber soweit bekannt ist, daß sich daraus $a^{(2)}$ bis zu einem höheren Grad als 2 in ϵ berechnen läßt.

Sei im folgenden $n \geq 2$ beliebig. Aus den Lemmata 1.1, 1.2 wissen wir, daß die konvergente Transformation (1.9) die Funktion $e^{2\tilde{H}(4)}$ in $e^{2\tilde{H}(2n)}$ überführt und $\tilde{H}(2n)$ ist reell analytisch im Gebiet

$D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < d_0 - \delta_n, |y| < d_0 - \delta_n\}$ und für δ_n gilt: $\delta_n \ll d_0$. Weiter existiert eine den Realitätsbedingungen gehorchende Lösung $Z^{(n)}(t)$ (1.13) des Systems (1.7), für die noch (1.12) richtig ist.

Wir untersuchen das Problem, ob diese Lösung $Z^{(n)}(t)$ in entsprechender Weise wie $Z^{(2)}(t)$ eine Abbildung $S^{(n)}$ liefert, die im wesentlichen dieselben Eigenschaften wie $S^{(2)}$ besitzt.

Wir denken uns die Lösungen $Z^{(2)}(t)$, $Z^{(n)}(t)$ gegeben durch

$$Z^{(2)}(t) := (x_1(t), x_2(t), \overline{ix_1(t)}, \overline{ix_2(t)})$$

$$Z^{(n)}(t) := (x_1^*(t), x_2^*(t), \overline{ix_1^*(t)}, \overline{ix_2^*(t)})$$

Entsprechend den Lemmata 3.1, 3.2 erhalten wir jetzt

Lemma 3.4 Sei $Z^{(n)}(t)$ die Lösung (1.13) des Systems (1.7), welche (1.12) erfüllt. Dann gilt

a) Für die Anfangswerte $x_1^*(0), \dots, \overline{ix_2^*(0)}$ von $Z^{(n)}(t)$ ist

$$(3.18) \quad |x_1^*(0)|^2 + |x_2^*(0)|^2 < 1.1.$$

b) Es existiert ein $t^* \in \mathbb{R}$ mit

$$(3.19) \quad |x_1^*(t^*)|^2 + |x_2^*(t^*)|^2 = c^2 \quad \text{mit} \quad c = 3\sqrt{-\mu}.$$

c) Die Funktion $|x_1^*(t)|^2$ ist surjektiv auf dem Intervall $[2, 3]$.

Bew.: Wegen (1.10) gilt: $T_{2n}^* = J + \mathcal{O}(\epsilon)$, woraus wir mit (1.13) folgern

$$(3.20) \quad Z^{(n)}(t) = T_{2n}^{*-1}(Z^{(2)}(t)) = Z^{(2)}(t) + \mathcal{O}(\epsilon).$$

$\mathcal{O}(\epsilon)$ ist analytisch; deshalb existiert eine von ϵ unabhängige Konstante $c_0 > 0$ mit $|\mathcal{O}(\epsilon)| < c_0 \epsilon$ für $-t_1 \leq t \leq t_1$, $t_1 > 0$.

Damit ergibt sich unter Verwendung von (3.5) aus (3.20):

$$|x_1^*(0)|^2 + |x_2^*(0)|^2 \leq |x_1(0) + c_0 \epsilon|^2 + |x_2(0) + c_0 \epsilon|^2$$

$$(3.5) \quad < 1 + c_1 \sqrt{\epsilon} < 1.1.$$

wenn nur ϵ genügend klein ist. Für c_1 kann gesetzt werden:

$$c_1 := 2|x_1^*(0)|c_0 + c_0^2.$$

zu b) Angenommen, es existiert kein $t^* \in \mathbb{R}$, für das (3.19) gilt. Dann ist $|x_1^*(t)|^2 + |x_2^*(t)|^2 < c^2$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dies bedeutet jedoch die Stabilität der Lösung $Z^{(n)}(t)$ und wegen der Konvergenz der Transformation T_{2n}^* wäre aufgrund von (3.20) auch die Lösung $Z^{(2)}(t)$ stabil. Dies steht jedoch im Widerspruch zu unserer Annahme.

zu c) $Z^{(n)}$ genügt den Realitätsbedingungen; deshalb können wir unter Beachtung der Voraussetzungen des 2. Hauptsatzes schreiben

$$L = |\lambda_1| |x_1^*(t)|^2 - |\lambda_2| |x_2^*(t)|^2. \text{ Da noch gilt } \tilde{H}^{(2n)} = \mathbb{I} + O(\epsilon^2),$$

erhalten wir unter Verwendung von (1.12) für $t = 0$:

$$|h| \leq |\lambda_1| |x_1^*(0)|^2 - |\lambda_2| |x_2^*(0)|^2 + c_2^* \epsilon^2 \stackrel{(3.18)}{<} 1.1 |\lambda_2| + c_2^* \epsilon^2 \leq \frac{3}{2} |\lambda_1|. \quad (3.18)$$

c_2^* bezeichnet hier eine von ϵ unabhängige Konstante; außerdem wurde bei der vorletzten Ungleichung noch benutzt, daß O.B.d.A.

$|\lambda_1| > |\lambda_2|$ angenommen werden kann.

Wir setzen jetzt $t = t^*$ und haben wegen $|h| \leq \frac{3}{2} |\lambda_1|$ sofort die Abschätzung: $|\lambda_1| |x_1^*(t^*)|^2 - |\lambda_2| |x_2^*(t^*)|^2 \geq -|h| - c_3^* \epsilon^2 \geq -2 |\lambda_1|$.

Hier ist wieder c_3^* eine von ϵ unabhängige geeignete Konstante.

Da außerdem wegen (3.19) zutrifft: $|x_1(t^*)|^2 + |x_2(t^*)|^2 = 9 |\lambda_1|/|\lambda_2|$, erhalten wir bei Elimination von $|x_2^*(t^*)|^2$ aus den beiden letzten Beziehungen für $t = t^*$:

$$(|\lambda_1| + |\lambda_2|) |x_1^*(t^*)|^2 \geq |\lambda_2| \cdot 9 |\lambda_1|/|\lambda_2| - 2 |\lambda_1| = 7 |\lambda_1|.$$

Wegen der Voraussetzung $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ liefert die vorangegangene Relation schließlich

$$|x_1(t^*)|^2 \geq \frac{7}{2} > 3.$$

Dies und (3.18) belegen den Teil c) der Behauptung des Lemmas.

Das letzte Lemma versetzt uns in die Lage, ähnlich wie in Abschnitt 0.2 $\mathcal{A}^{(2)}$, $\Sigma^{(2)}$ entsprechende Flächen $\mathcal{A}^{(n)}$, $\Sigma^{(n)}$ festzulegen.

Lemma 3.4 stellt also sicher, daß die Lösungskurve $Z^{(n)}(t)$ für eine gewisse Zeit in der Menge

$$\mathcal{R}^{(n)} := \{ z \in \mathbb{C}^4 \mid \tilde{H}^{(2n)}(z) = h, y_k = i\bar{x}_k (k=1,2), 2 \leq |x_1|^2 \leq 3 \}$$

bleibt. Unter Beachtung der Ausführungen auf Seite 16 gelten in $\mathcal{R}^{(n)}$ unter Ausnutzung von $L = |\lambda_1||x_1|^2 - |\lambda_2||x_2|^2$ und $|h| < \frac{3}{2}|\lambda_1|$ die folgenden Ungleichungen

$$|\lambda_2||x_2|^2 \geq |\lambda_1||x_1|^2 - \frac{3}{2}|\lambda_1| - c_3^* \varepsilon^2 \geq \frac{1}{2}|\lambda_1| - c_3^* \varepsilon^2 \geq \frac{1}{4}|\lambda_1| \quad ;$$

$$|\lambda_2||x_2|^2 \leq 3|\lambda_1| + \frac{3}{2}|\lambda_1| + c_4^* \varepsilon^2 \leq 5|\lambda_1| \quad .$$

Dabei sind hier wieder c_3^*, c_4^* von ε unabhängige geeignete Konstanten.

Die beiden letzten Ungleichungen machen klar, daß es sich bei $\mathcal{R}^{(n)}$ um eine beschränkte Mannigfaltigkeit handelt und wie in Abschnitt 0.2 sind wir jetzt in der Lage, die zu $\Sigma^{(2)}, \Sigma^{*(2)}$ entsprechenden Flächen $\Sigma^{(n)}, \Sigma^{*(n)}$ zu definieren. Es ist :

$$\Sigma^{(n)} := \{ z \in \mathcal{R}^{(n)} \mid \operatorname{Im} \ln x_2 = 0 \pmod{2\pi} \}$$

$$(3.21) \quad \Sigma^{*(n)} := \{ z \in \Sigma^{(n)} \mid 2 + \delta \leq |x_1|^2 \leq 3 - \delta, 0 < \delta < \frac{1}{3} \} \quad .$$

Wir formulieren nun ein zu Satz 3.1 analoges Resultat.

Satz 3.2

Vor.: a) Sei $n \geq 2$ beliebig. Gegeben ist die in D_n reell analytische Hamilton-Funktion $\tilde{H}^{(2n)}$.

b) Die Ruhelage von (1.7) ist nicht stabil.

c) $Z^{(n)}(t)$ ist eine Lösung von (1.7) und erfüllt die Bedingungen (1.12), (3.18), (3.19) .

d) L teilt die Normalform von $\hat{H}^{(4)}$.

Beh.: Die Lösung $Z^{(n)}(t)$ definiert eine Abbildung $s^{(n)}$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$(3.22) \quad \begin{cases} (i) & s^{(n)}: \Sigma_c^{*(n)} \longrightarrow \Sigma_c^{(n)} \quad \text{ist reell analytisch.} \\ (ii) & s^{(n)} \quad \text{ist inhaltstreu.} \end{cases}$$

(iii) $s^{(n)}$ kann geschrieben werden in der Form

$$(3.22) \quad \begin{aligned} x_1 &= \omega + x + h p_1^{(2n-2)}(x, y, h, \epsilon) + o(\epsilon^{2n-1}) \\ y_1 &= y + h p_2^{(2n-2)}(x, y, h, \epsilon) + o(\epsilon^{2n-1}) \end{aligned}$$

und die $p_i^{(2n-2)}$ ($i=1,2$) sind Polynome in den Variablen x, y mit dem Höchstgrad $2n-2$ in ϵ .

Bew.: (i): In der Definition (3.8) ersetzen wir $Z(t)$ durch $Z^{(n)}(t)$, $\Sigma^{(2)}$ durch $\Sigma^{(n)}$ aus (3.21). Dann wird durch die Vorschrift (3.8) eine reelle Abbildung $\hat{S}^{(n)}$ festgelegt und wie man den Ausführungen im Abschnitt 0.2 entnimmt, ist $\hat{S}^{(n)}$ definiert auf ganz $\Sigma^{(n)}$. Wir versuchen jetzt von $\hat{S}^{(n)}$ aus zu einer komplexen Abbildung $s^{(n)}$ zu gelangen mit $s^{(n)}|_{\Sigma^{(n)}} = \hat{S}^{(n)}$. Dies kann in derselben Art und Weise geschehen, wie wir es in Abschnitt 0.2 durchgeführt haben. Denn die Gleichung

$$\tilde{H}^{(2n)} = L + o(\epsilon^2) = h$$

besitzt wegen Lemma 0.2.3 eine analytische Auflösung nach x_2 mit $x_2 = \phi(x_1, y_1, h, \epsilon)$, sodaß die komplexe Erweiterung $\Sigma_\epsilon^{(n)}$ von $\Sigma^{(n)}$ durch die analytischen Gleichungen $y_2 = i x_2$, $x_2 = \phi(x_1, y_1, h, \epsilon)$ entsteht. Die komplexe Ausdehnung der reellen Abbildung $\hat{S}^{(n)}$ erfolgt nun dadurch, indem wir einer komplexen Lösung des Systems (1.7) von einem Punkt in $\Sigma_\epsilon^{(n)}$ aus folgen, bis sie wieder $\Sigma_\epsilon^{(n)}$ in einem weiteren Punkt schneidet.

Zu (ii): Aus dem Beweis zu (0.2.15)(ii) in Lemma 0.2.2 wird klar, daß die Schnittbedingung von S ausschließlich auf die Definition (0.2.19) zurückzuführen ist und deshalb vollkommen unabhängig davon ist, ob L die Normalform von $\hat{H}^{(4)}$ teilt oder nicht. Da $s^{(n)}$ durch die zu (0.2.19) analoge Vorschrift (3.8) gegeben ist, dürfen wir wörtlich den Beweis zu (0.2.15)(ii) auf den Nachweis der Inhaltstreue von $s^{(n)}$ übertragen.

Zu (iii): Entsprechend den Ausführungen zu (3.9)(iii), (iv) betrachten wir das Hamilton-System

$$(3.23) \quad \dot{x}_k = H_{w_k}^{(2n)} x_k, \quad \dot{y}_k = -H_{w_k}^{(2n)} y_k \quad (k=1,2).$$

Wie den Ausführungen zu Satz 3.1 zu entnehmen ist, erhält man eine Näherung $\hat{S}$ für $S^{(n)}$ in folgender Form

$$\hat{S} : x_1(T) = x_1(0) e^{i\hat{Q}}, \quad y_1(T) = i \overline{x_1(0)} e^{-i\hat{Q}}$$

mit den analytischen Funktionen (siehe (3.12))

$$T = 2\pi i / H_{w_2}^{(2n)}, \quad \hat{Q} = 2 H_{w_1}^{(2n)} / H_{w_2}^{(2n)}.$$

Nun liefert Satz 2.3 und dessen anschließende Bemerkung, daß sich $\hat{S}$ in der folgenden Gestalt schreiben läßt:

$$(3.24) \quad x_1 = \omega + x + h \varepsilon^2 \hat{f}(x, y, h, \varepsilon), \quad y_1 = y + h \varepsilon^2 \hat{g}(x, y, h, \varepsilon)$$

und $\hat{f}, \hat{g}$ sind reell analytische Funktionen in x, y und haben die Periode 2π in x . $\hat{S}$ stimmt mit $S^{(n)}$ bis zu Gliedern der Ordnung $2n-2$ in ε überein, denn $S^{(n)}$ wird durch Lösungen von (1.7) bzw.

(3.14) bestimmt, welche identisch sind bis auf Glieder der Ordnung $2n-2$ in ε mit den Lösungen von (3.23). Wegen (3.24) wird damit die Behauptung (iii) einsichtig. ■

Ähnlich wie Lemma 3.3 beweisen wir

Lemma 3.5 ω erfüllt die Ungleichungen (0.2.2). Die Abbildung $S^{(n)}$ aus (3.22) besitzt einen eindeutig bestimmten Parameter $a^{(n)}$ mit

$a^{(n)} = a^{(n)}(\varepsilon, h)$ sodaß die Abbildung

$$(3.25) \quad \hat{S}^{(n)} := S^{(n)} + \left(a^{(n)}(\varepsilon, h) \right)_0$$

eine invariante Kurve besitzt. Außerdem hat $a^{(n)}$ die Gestalt

$$(3.26) \quad a^{(n)}(\varepsilon, h) = h A^{(2n-2)}(\varepsilon, h) + \mathcal{O}(\varepsilon^{2n-1})$$

und $A^{(2n-2)}$ ist ein Polynom in ε, h mit dem Höchstgrad $2n-2$ in ε .

Bew.: Genau wie $S^{(2)}$ erfüllt $S^{(n)}$ alle Voraussetzungen des 1. Hauptsatzes, sodaß also (3.25) eine invariante Kurve besitzt. Die besondere Form (3.26) von $a^{(n)}$ folgt aus der speziellen Gestalt von $S^{(n)}$, wie sie in (3.22)(iii) vorliegt. Um diese Behauptung einzusehen,

betrachten wir die Reihenentwicklung von $a^{(n)}$ nach Potenzen von ϵ , welche unter Berücksichtigung des Beweisgangs von Lemma 3.3 in folgender Form angesetzt werden darf:

$$a^{(n)}(\epsilon, h) = a_2(h) \epsilon^2 + \dots + a_{2n-2}(h) \epsilon^{2n-2} + \dots$$

Wir entnehmen dem Beweis von Lemma 3.3, bestimmen sich die

$a_i(h)$ ($2 \leq i \leq 2n-2$) aus der Gleichung

$$a_i(h) = -[F_i], \quad F_i(x) = h \left(\sum_{k=2}^{i-1} P_k(x+\tilde{u}, \tilde{v}, h) \epsilon^k \right)_i + h P_i(x, 0, h).$$

Die Polynome $\tilde{u}, \tilde{v}$ sind auf Seite 39 festgelegt und die P_k stammen aus der folgenden möglichen Darstellung für das Polynom $P_1^{(2n-2)}$ aus

$$(3.22)(iii): P_1^{(2n-2)}(x, y, h, \epsilon) = \sum_{k=2}^{2n-2} P_k(x, y, h) \epsilon^k. \quad \text{Hier haben wir noch benutzt, daß wegen (3.17) } P_1^{(2n-2)} \text{ mit quadratischen Gliedern in } \epsilon \text{ beginnt. Für } 2 \leq i \leq 2n-2 \text{ kann also bei der Mittelwertbildung } h \text{ als konstanter Faktor ausgeklammert werden, sodaß sich}$$

$$a_i(h) = h a_i^*(h) \quad (2 \leq i \leq 2n-2)$$

ergibt. (3.26) wird damit offensichtlich. ■

Das letzte Lemma nimmt eine Schlüsselstellung ein in dem Beweis für die Gleichung $a^{(2)}(\epsilon, h) = h b(\epsilon, h)$. Dazu zunächst:

Lemma 3.6 Sei $n \geq 2$ beliebig und sei $a^{(2)}$ die komplexe Zahl aus (3.15). Im Hinblick auf (3.16) gilt sogar

$$(3.27) \quad a^{(2)}(\epsilon, h) = h A^{(2n-2)}(\epsilon, h) + O(\epsilon^{2n-1})$$

und $A^{(2n-2)}$ ist ein Polynom in ϵ mit dem Höchstgrad $2n-2$.

Bew.: Sei $\mathcal{J} = K^{(2)}(\mathcal{F})$ die invariante Kurve von $\mathcal{S}^{(2)}$ aus (3.15).

Wegen den Formeln $(1.4.3)_n$, $(1.4.4)_n$ kann $K^{(2)}$ in die Form

$$(3.28) \quad y = \phi(x) = \phi(x + 2\pi)$$

gebracht werden und ϕ ist eine reell analytische Funktion. Außerdem gilt nach Aussage des 1. Hauptsatzes für $K^{(2)}$:

$$(3.29) \quad (\mathcal{S}^{(2)} \circ K^{(2)})(\mathcal{F}) = K^{(2)}(\omega + \mathcal{F}) \quad - \infty < \mathcal{F} < \infty$$

und ω stammt aus (3.9)(iii). Weiter wissen wir aus Satz 3.2, daß $S^{(n)}$ inhaltstreu ist. Auf Grund von Lemma 1.1.3 genügt deshalb die Abbildung $\hat{S}^{(n)}$ aus (3.25) der Schnittbedingung. Wegen (3.28) und unter Beachtung von (3.29) existieren demnach Werte x_1, x_2 sodaß

$$(3.30) \quad \hat{S}^{(n)} \bullet K^{(2)}(x_1) = \hat{S}^{(2)} \bullet K^{(2)}(x_2)$$

zutrifft. Die letzte Gleichung liefert nun wegen (3.9)(iii), (3.15), (3.16) und (3.22)(iii), (3.25), (3.26) die Identität

$$(3.31) \quad x_1 + h p_1^{(2n-2)}(x_1, y, h, \epsilon) + \sigma(\epsilon^{2n-1}) + a^{(2n-2)}(\epsilon, h) = \\ = x_2 + f^{(2)}(x_2, y, h, \epsilon) + a^{(2)}(\epsilon, h) .$$

Diese Gleichung muß gelten für alle h ; setzen wir beispielsweise $h=0$, so folgt unter Verwendung von (3.16), (3.26) die Relation

$$(3.32) \quad x_1 + \sigma(\epsilon^{2n-1}) = x_2 + \sigma(\epsilon^3) .$$

Da $n \geq 2$ vorausgesetzt ist, kann dies für beliebige $\epsilon > 0$ nicht zutreffen. Wegen der Gültigkeit von (3.31) folgern wir nun, daß sich der Wert h bei $f^{(2)}$ und $a^{(2)}$ bis zu Gliedern der Ordnung $2n-2$ in ausklammern lassen muß. Denn wäre dies nicht der Fall, so erhalten wir mit (3.32) eine widersprüchliche Gleichung. Insgesamt muß also (3.27) gelten. ■

Mit dem letzten Lemma können wir leicht beweisen:

Lemma 3.7 Sei $a^{(2)} = a^{(2)}(\epsilon, h)$ aus (3.15). Dann gilt

$$(3.33) \quad a^{(2)}(\epsilon, h) = h b(\epsilon, h)$$

und b ist eine konvergente Potenzreihe.

Bew.: Aus Lemma 3.6 ist ersichtlich, daß die Gleichung (3.27) zutrifft für jedes $n \geq 2$. Wegen der Eindeutigkeit der Reihe $a^{(2)}$ - siehe dazu Satz 8.1 - folgt daraus zwingend (3.33). Denn angenommen, es existiert ein $m \in \mathbb{N}$, sodaß bei der Entwicklung von $a^{(2)}$:

$$a^{(2)}(\epsilon, h) = a_2(h) \epsilon^2 + \dots + a_m(h) \epsilon^m + \dots$$

der Koeffizient $a_m(h)$ von g^m den Wert h nicht mindestens linear enthält. Dann wende ich Formel (3.27) für ein $n \geq m$ an und erhalte wegen der Eindeutigkeit von $a^{(2)}(g, h)$ sofort einen Widerspruch zu der obigen Annahme. ■

2.4 Der Abschluß des Beweises der isoenergetischen Stabilität auf der Energiefläche $h = 0$

Wir gehen zurück in den Abschnitt 0.2 und sehen, daß dort die Abbildung S hier der Abbildung $S^{(2)}$ entspricht. Weiter sind Σ_c und $\Sigma_c^{(2)}$ identisch, sodaß wir ein zu Lemma 0.2.4 analoges Resultat erhalten:

Lemma 4.1 Jeder Punkt $P_0 \in \Sigma_c^{(2)}$ mit $2 - \delta \leq |x_1(t_0)|^2 \leq 2 + \delta$ ($0 < \delta < \frac{1}{3}$) wird durch $S^{(2)}$ oder $S^{(2)-1}$ oder durch mehrfache Anwendung dieser Abbildungen auf einen Punkt $P_1 \in \Sigma_c^{(2)}$ mit $3 - \delta < |x_1(t_2)|^2 < 3$ abgebildet.

Bew.: S in Lemma 0.2.4 entspricht hier der Abbildung $S^{(2)}$; außerdem handelt es sich bei den Mengen Σ_c und $\Sigma_c^{(2)}$ um die gleichen Flächen. Der Beweis dieses Lemmas ist somit mit dem Nachweis zu Lemma 0.2.4 identisch. ■

Mit Lemma 3.7 läßt sich außerdem zeigen

Lemma 4.2 Ist $h = 0$, so besitzt $S^{(2)}$ aus (3.9) in dem Streifen $2 - \delta \leq |x_1(t)|^2 \leq 3 - \delta$ eine invariante Kurve.

Bew.: Wegen Lemma 3.7, (3.33) hat $\hat{S}^{(2)}$ aus (3.15) die Gestalt

$$\hat{S}^{(2)} = S^{(2)} + \begin{pmatrix} h A(c, h) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für $h = 0$ gilt also $\hat{S}^{(2)} = S^{(2)}$. Da nun wegen (3.9) (i) $S^{(2)}$ definiert ist auf der Menge

$$\hat{\Sigma}_c^{(2)} = \{ z \in \Sigma_c^{(2)} \mid 2 - \delta \leq |x_1(t)|^2 \leq 3 - \delta, 0 < \delta < \frac{1}{3} \},$$

folgt jetzt mit Lemma 3.3, daß $S^{(2)}$ in $\hat{\Sigma}_c^{(2)}$ eine invariante Kurve besitzt, wenn nur $h = 0$ ist. Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Es ist aber jetzt offensichtlich, daß die beiden letzten Lemmata gleichzeitig nicht gelten können. Beide Ergebnisse gehen aber auf die Voraus-

setzung zurück, die Gleichgewichtslage ist nicht stabil. Somit ist es uns gelungen im Falle $h = 0$ einen Widerspruch zu der obigen Annahme herzuleiten. Dies beweist die Stabilität der Ruhelage auf der Niveaufläche $h = 0$ und wir sind mit dem Nachweis des 2. Hauptsatzes fertig.

Symbolverzeichnis

Konstanten

μ	9
ω	12
c	56, 57
δ_n (bzw. δ), s_n (bzw. s), M_n (bzw. M)	60

Mengen

$\Sigma, \Sigma^*, \Sigma_c, \Sigma_c^*$	16, 18, 19, 20
$\Sigma^{(2)}, \hat{\Sigma}^{(2)}, \Sigma_c^{(2)}, \hat{\Sigma}_c^{(2)}$	105
$\Sigma^{(n)}, \hat{\Sigma}^{(n)}, \Sigma_c^{(n)}, \hat{\Sigma}_c^{(n)}$	112, 113
$\Omega^{(2)}, \Omega^{(n)}$	105, 112
$D(\delta, s), D(\delta, s, \epsilon_0)$	58, 84
D_+	61
$P(\delta, s), P(\delta, s, \epsilon_0)$	58, 84
D_2, D_n	96

Funktionen bzw. formale Reihen

$\tilde{H}$	7, 22, 95
L	2, 9
$[F]$	36
$\tilde{u}, \tilde{v}$	39
$(F(\tilde{u}, \tilde{v}))_n$	39
$G^{(m)}(x, y, \epsilon)$	106
S^*, S	17, 20
$S^{(2)}, S^{(2)}$	105, 106
$S^{(n)}$	112
$\hat{S}^{(2)}, \hat{S}^{(n)}$	108, 114
$H(x, y, \epsilon), H^{(2n)}, H^{(2n)}, \hat{H}^{(2n)}, \tilde{H}^{(2n)}$	95

L I T E R A T U R

- [1] ARNOLD, V.I.: Kleine Nenner und Stabilitätsprobleme der klassischen Mechanik und der Himmelsmechanik.
Russ. Math. Surveys 18, 85 - 191 (1963)
- [2] ——— The Stability of the Equilibrium Position of a Hamiltonian System of Ordinary Differential Equations in the General Elliptic Case.
Soviet Math. 2, 247 - 249 (1961)
- [3] BELLMANN, R.: The iteration of power series in two variables.
Duke Math. J. 19, 339 - 347 (1952)
- [4] BRJUNO, A.D.: The analytic form of differential equations.
Trans. Moscow Math. Soc. Vol. 26, 1 - 72 (1972)
- [5] DIEUDONNE, J.: Foundations of modern analysis.
Academic Press, New York (1960)
- [6] DIRICHLET, G.: Werke. Vol. 2, 5 - 8, Berlin 1897
- [7] HURWITZ-COURANT, Funktionentheorie, Springer Verlag
Berlin - Göttingen - New York 1964
- [8] LIAPUNOFF, A.: Problème générale de la stabilité du mouvement. Ann. Fac. Sci. Toulouse (2) 9, 203 - 474 (1907)

- [9] MARKEEV, Ober Stabilitätsprobleme der Gleichgewichtslage
Hamilton'scher Systeme. Prikl. Mat. Meh. 34, Nr. 6,
997 - 1004; 1970
- [10] MOSER, J.: New aspects in the theory of stability of Hamil-
tonian Systems. Communications of Pure and Applied
Mathematics, Vol. XI, 81 - 114 (1958)
- [11] ——— On invariant curves of area + preserving mappings
of an annulus. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.
Phys. Nr. 1 (1962)
- [12] ——— A rapidly convergent iteration method on nonlinear
differential equations II.
Ann. Scuola Normale Sup., ser. III, 20, 499 - 535 (1966)
- [13] ——— Convergent series expansions for quasiperiodic
motions. Math. Annalen 169, 136 - 176 (1967)
- [14] ——— Stable and Random Motions in Dynamical Systems
with special Emphasis on Celestial Mechanics.
Ann. of Math. Studies 77, Princeton University Press (1973)
- [15] POINCARÉ, H.: Les methodes nouvelles de la mecanique celeste.
Vol. 2, Chap. 9, Paris 1893
- [16] POLLARD, H.: Mathematical Introduction to celestial Mechanics.
Pentrice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1966)

- [17] ROßMANN, H.: Über das Verhalten analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung. Math. Annalen 154, 285 - 300 (1964)

- [18] ———— Über die Normalform analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nähe einer singulären Lösung. Math. Annalen 169, 55 - 72 (1967)

- [19] ———— Über die Iteration analytischer Funktionen. Journal Math. and mechanics, Vol. 17, No. 6, 523 - 532 (1967)

- [20] ———— Über invariante Kurven differenzierbarer Abbildungen eines Kreisrings. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Nr. 5 (1970)

- [21] ———— Differentialgleichungen I - III . Vorlesungsmitschrift von Goldhorn (1970 - 1971)

- [22] ———— Bemerkungen zur Newtonschen Methode. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen II Math. Phys. Klassen Nr. 1, 1972

- [23] ———— On a new proof of MOSER'S twist mapping theorem. Celestial Mecanics, Vol. 14, No. 1, 19 - 31; 1976

- [24] ———— Note on sums containing small divisors Communications of Pure and Applied Mathematics XXIX, Nr. 6, 755 - 758 (1976)

- [25] SIEGEL, C.L.: Über die Existenz einer Normalform analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung.
Math. Annalen 128, 144 - 170 (1970)
- [26] ——— Iterations of analytic functions.
Annales Math. 43, (1942)
- [27] SIEGEL - MOSER : Lectures on celestial mechanics.
Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, Bd 187, (1971)
- [28] ZEHNDER, E.: A remark about Newton's Method.
Communications of Pure and Applied Mathematics,
Vol. XXVII, 361 - 366 (1974)

Lebenslauf

Am 22.08.49 wurde ich in Birkenfeld/Nahe, Kreis Birkenfeld geboren. Nach dem Besuch der Volksschule Börfink, Kreis Birkenfeld, von 1956 bis 1960 trat ich im Frühjahr 1960 in das Mathematische naturwissenschaftliche Gymnasium Birkenfeld/Nahe ein. Acht Jahre später, am 22.06.1968 erhielt ich dort das Zeugnis der Reife ausgehändigt. Vom WS 1968/69 an studierte ich an der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz die Fächer Mathematik und Physik. Am 17.04.74 bestand ich an der Universität Mainz die Diplomprüfung in Mathematik.

Seit meiner Vordiplomprüfung im SS 1970 bis zu meiner Diplomprüfung 1974 war ich als Hilfsassistent im Fachbereich Mathematik der Universität Mainz tätig.

Seit 1.08.1974 bin ich wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Erziehungswissenschaftlichen Hochschule Rheinland-Pfalz, Abteilung Koblenz.

